

4 Rechenverfahren für Stabwerke

4.1 Ablaufplan und Rechenkern des Programms Stab2D-NL

In einem ersten Schritt werden die Eingangsdaten kontrolliert. Dazu werden vor allem die für die nichtlineare Rechnung benutzten Querschnitte geladen und auf korrekte Definition sowie auf Symmetrie zur z-Achse hin überprüft. Weiterhin werden die Steifigkeitswerte für kleine Beanspruchungen ermittelt, indem eine kleine Dehnung ε_0 zur Bestimmung der Dehnsteifigkeit und eine kleine Verkrümmung k_z für die Biegesteifigkeit sowohl positiv als auch negativ aufgebracht werden.

$$B_{\text{lin-elast.}} = EI \approx M_0 / k_z \quad (4.1)$$

$$D_{\text{lin-elast.}} = EA \approx N_0 / \varepsilon_0 \quad (4.2)$$

Bei gevouteten Balken werden diese Querschnittswerte an vier Interpolationsstellen (0,00 / 0,33 / 0,66 / 1,00) berechnet und durch die Ergebnisse ein Polynom 3. Ordnung gelegt. Damit kann in der späteren Rechnung sehr einfach und relativ genau für jede Position x die Steifigkeit für kleine Beanspruchungen bestimmt werden. Die so ermittelten Steifigkeitswerte werden für die erste linear-elastische Rechnung benutzt sowie immer dann, wenn die Beanspruchungen M_y / N_x während der Berechnung eines Stabes kleiner als die zuvor berechneten Werte M_0 / N_0 sind.

Die erste Iteration findet mit linear-elastischen Werten für die Biege- und für die Dehnsteifigkeit statt, wobei gegebenenfalls bereits unterschiedliche Werte für positive und negative Schnittgrößen verwendet werden. In allen weiteren Iterationen werden die Steifigkeitswerte mit einer jeweils aktuellen Dehnungsberechnung ermittelt.

Für die eigentliche Berechnung des Stabwerks werden zu Beginn einer Iteration alle Stäbe im Volleinspannzustand berechnet, d.h., Stabanfang und Stabende sind unverschieblich und fest eingespannt gelagert. Mit Hilfe des Übertragungsverfahrens werden jetzt die Stabanfangswerte (N_x , Q_z , M_y) iterativ derart bestimmt, dass die Bedingungen am Stabende ($w_x = w_z = \varphi = 0$, volle Einspannung) erfüllt sind. Durch die Nutzung der Eins-Zustände des Übertragungsverfahrens kann die lokale Steifigkeitsmatrix für den Stab aufgestellt werden. Die zuvor bestimmten Auflagerkräfte stellen den Kräftevektor dar und müssen noch ins globale Koordinatensystem gedreht werden.

Mit der Berechnung aller Stäbe kann die globale Steifigkeitsmatrix sowie der globale Kräftevektor zusammengesetzt werden. Das Lösen des linearen Gleichungssystems mit dem Gauß-Algorithmus liefert die Knotenverformungen, die wiederum Ausgangspunkt für die nächste Iteration sind.

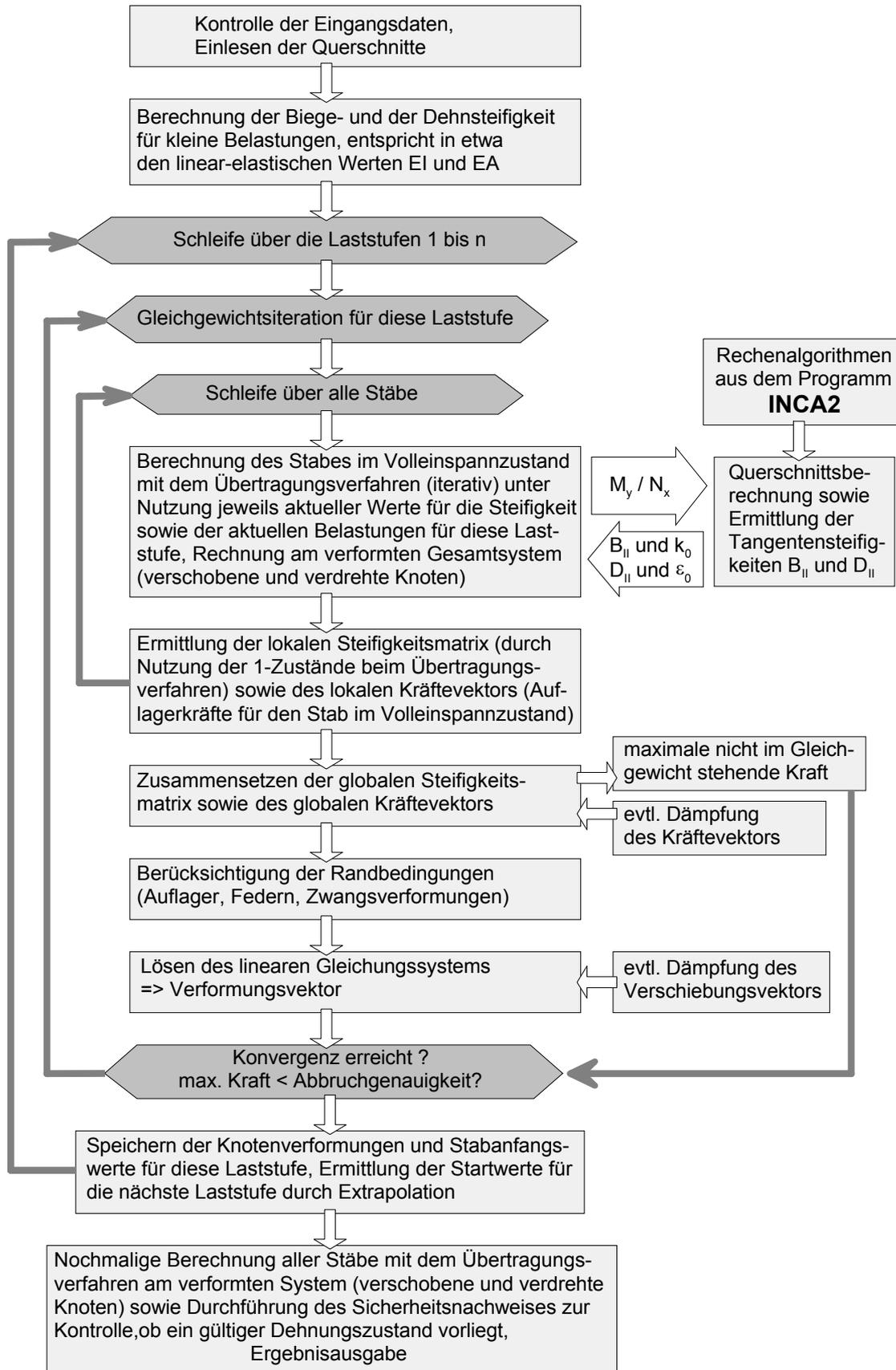


Bild 4.1 Programmablauf Stab2D-NL

4.2 Übertragungsverfahren

4.2.1 Grundlagen des Übertragungsverfahrens

Der grundlegende Gedanke des Übertragungsverfahrens ist, dass sich bei Kenntnis aller Zustandswerte am Stabanfang mit Hilfe der Übertragungsgleichungen die Zustandsgrößen an jeder Stelle des Stabes eindeutig berechnen lassen. Die Werte für die Steifigkeiten müssen ebenfalls bekannt sein.

Für die programmgesteuerte Berechnung wird der Stab durch Zwischenpunkte in mehrere Elemente der Länge dx geteilt, wobei bei einer linear-elastischen Rechnung nach Theorie 1. Ordnung ein einziges Element ausreichen würde. An Stellen mit einer Lasteinleitung oder einem Wechsel der Beanspruchung müssen Zwischenpunkte generiert werden, an Stellen mit einer Änderung der Steifigkeit sind ebenfalls Punkte einzufügen. Diese anfängliche Teilung kann während der Rechnung gegebenenfalls noch weiter verfeinert werden.

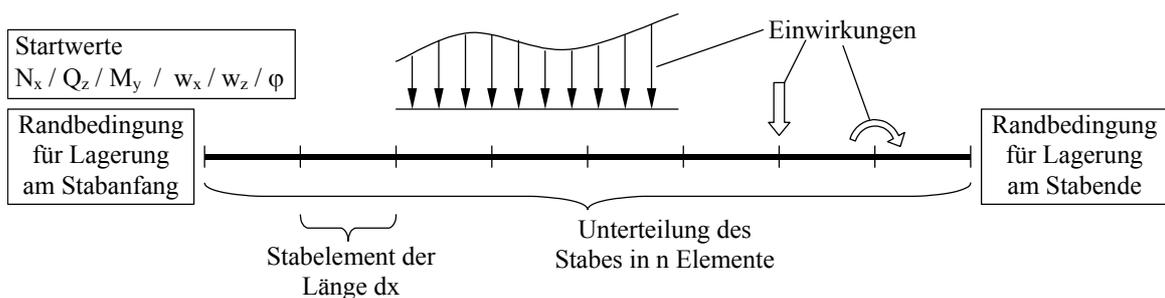


Bild 4.2 Stab für die Rechnung mit dem Übertragungsverfahren (ebenes System)

Bei der allgemeinen Formulierung des Übertragungsverfahrens ist von den Startwerten jeweils entweder die Kraftgröße oder die Verformungsgröße bekannt und gleich Null. Für den voll eingespannten Stab bei einem ebenen System wären dies die Randbedingungen $w_x = w_z = \varphi = 0$. Die anderen Startwerte (hier $N_x / Q_z / M_y$) müssen iterativ derart bestimmt werden, dass die Randbedingungen am Stabende ebenfalls erfüllt werden. Dazu wird die Übertragung für Näherungen der Startwerte durchgeführt (im ersten Schritt gleich Null) und die Abweichungen zu den Randbedingungen ermittelt. Zusätzlich werden sogenannte Eins-Zustände übertragen, mit denen es möglich ist, die Auswirkungen am Stabende infolge einer Änderung am Stabanfang zu ermitteln. Bei Verwendung der in Tabelle 4.1 dargestellten Eins-Zustände findet die Übertragung mit den gleichen Steifigkeiten wie beim Grundsystem statt, die äußeren Lasten werden jedoch nicht berücksichtigt.

Tabelle 4.1 Eins-Zustände für das Übertragungsverfahren für ein ebenes System

Unbekannte Größe	Zu übertragender Einszustand
N_x	$\mathbf{N}_{x,1} = \mathbf{1} / Q_{z,1} = 0 / M_{y,1} = 0 \quad / \quad w_{x,1} = 0 / w_{z,1} = 0 / \varphi_1 = 0$
Q_z	$N_{x,2} = 0 / \mathbf{Q}_{z,2} = \mathbf{1} / M_{y,2} = 0 \quad / \quad w_{x,2} = 0 / w_{z,2} = 0 / \varphi_2 = 0$
M_y	$N_{x,3} = 0 / Q_{z,3} = 0 / \mathbf{M}_{y,3} = \mathbf{1} \quad / \quad w_{x,3} = 0 / w_{z,3} = 0 / \varphi_3 = 0$
w_x	$N_{x,4} = 0 / Q_{z,4} = 0 / M_{y,4} = 0 \quad / \quad \mathbf{w}_{x,4} = \mathbf{1} / w_{z,4} = 0 / \varphi_4 = 0$
w_z	$N_{x,5} = 0 / Q_{z,5} = 0 / M_{y,5} = 0 \quad / \quad w_{x,5} = 0 / \mathbf{w}_{z,5} = \mathbf{1} / \varphi_5 = 0$
φ	$N_{x,6} = 0 / Q_{z,6} = 0 / M_{y,6} = 0 \quad / \quad w_{x,6} = 0 / w_{z,6} = 0 / \mathbf{\varphi}_6 = \mathbf{1}$

Nach der Übertragung des Grundsystems sowie aller benötigten Eins-Zustände lässt sich die Jakobi-Matrix berechnen und Gleichung 4.3 bzw. 4.4 aufstellen. Die Gleichungen sind hier beispielhaft für einen Stab im Volleinspannzustand dargestellt.

$$\overrightarrow{\Delta w} = J \cdot \overrightarrow{\Delta F} \quad (4.3)$$

mit $\overrightarrow{\Delta w}$ = Differenz zwischen aktueller Verformung und

Randbedingung am Stabende

J = Jakobimatrix

$\overrightarrow{\Delta F}$ = Verbesserungen der Stabanfangswerte

$$\begin{pmatrix} \Delta w_x \\ \Delta w_z \\ \Delta \varphi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{w_{x,1,Stabende}}{N_{x,1,Stabanfang}} \\ \frac{w_{x,1,Stabende}}{N_{x,1,Stabanfang}} \\ \frac{\varphi_{1,Stabende}}{N_{x,1,Stabanfang}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{w_{x,2,Stabende}}{Q_{z,2,Stabanfang}} \\ \frac{w_{x,2,Stabende}}{Q_{z,2,Stabanfang}} \\ \frac{\varphi_{2,Stabende}}{Q_{z,2,Stabanfang}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{w_{x,3,Stabende}}{M_{y,3,Stabanfang}} \\ \frac{w_{x,3,Stabende}}{M_{y,3,Stabanfang}} \\ \frac{\varphi_{3,Stabende}}{M_{y,3,Stabanfang}} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta N_x \\ \Delta Q_z \\ \Delta M_y \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Das Lösen des linearen Gleichungssystems liefert die Verbesserungen der Startwerte und damit eine neue Näherungslösung für die nächste (i+1) Iteration.

$$N_{x,i+1} = N_{x,i} + \Delta N_x \quad (4.5)$$

$$Q_{z,i+1} = Q_{z,i} + \Delta Q_z \quad (4.6)$$

$$M_{y,i+1} = M_{y,i} + \Delta M_y \quad (4.7)$$

Die Verwendung der genannten Eins-Zustände sowie der daraus resultierenden Jakobi-Matrix funktioniert sehr gut, wenn die Vereinfachungen $\sin \alpha = \alpha$ und $\cos \alpha = 1$ genutzt und damit große Verformungen vernachlässigt werden (Theorie 3. Ordnung). Wird dieser Effekt jedoch wie in Stab2D-NL berücksichtigt, müssen die Genauigkeit der Jakobi-Matrix und folglich auch die Ergebnisse der Eins-Zustände verbessert werden. Aus diesem

Tabelle 4.2 Benutzte Eins-Zustände in Stab2D-NL für das Übertragungsverfahren

Unbekannte Größe	Zu übertragender Einszustand
N_x	$\mathbf{N}_{x,1} = \mathbf{N}_x + \Delta\mathbf{N}_{x,1} / Q_{z,1} = Q_z / M_{y,1} = M_y \quad / \quad w_{x,1} = w_x / w_{z,1} = w_z / \varphi_1 = \varphi$
Q_z	$N_{x,2} = N_x / \mathbf{Q}_{z,2} = \mathbf{Q}_z + \Delta\mathbf{Q}_{z,2} / M_{y,2} = M_y \quad / \quad w_{x,2} = w_x / w_{z,2} = w_z / \varphi_2 = \varphi$
M_y	$N_{x,3} = N_x / Q_{z,3} = Q_z / \mathbf{M}_{y,3} = \mathbf{M}_y + \Delta\mathbf{M}_{y,3} \quad / \quad w_{x,3} = w_x / w_{z,3} = w_z / \varphi_3 = \varphi$
φ	$N_{x,6} = N_x / Q_{z,6} = Q_z / M_{y,6} = M_y \quad / \quad w_{x,6} = w_x / w_{z,6} = w_z / \varphi_6 = \varphi + \Delta\varphi_6$

Grund werden für die Startwerte der Eins-Zustände die Näherungslösungen der Stabanfangswerte benutzt, wobei jeweils ein kleiner Wert Δ dazu addiert wird. Die anschließende Übertragung erfolgt mit den gleichen Steifigkeiten wie für das Grundsystem, jetzt jedoch auch unter Berücksichtigung aller Belastungen sowie der aktuellen Verformung des Systems.

Die in Tabelle 4.2 dargestellten Eins-Zustände werden in Stab2D-NL benutzt. Da als Randbedingung für den Stabanfang und für das Stabende nur die Möglichkeiten *volle Einspannung* und *Drehgelenk für ein Biegemoment* implementiert wurden, entfallen die Eins-Zustände für w_x und w_z .

Die Jakobi-Matrix berechnet sich jetzt auf folgende Weise, wieder beispielhaft für den Volleinspannzustand dargestellt.

$$\begin{pmatrix} \Delta w_x \\ \Delta w_z \\ \Delta \varphi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{w_{x,1,Ende} - w_{x,Ende}}{\Delta N_{x,1}} \\ \frac{w_{z,1,Ende} - w_{z,Ende}}{\Delta N_{x,1}} \\ \frac{\varphi_{1,Ende} - \varphi_{Ende}}{\Delta N_{x,1}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{w_{x,2,Ende} - w_{x,Ende}}{\Delta Q_{z,2}} \\ \frac{w_{z,2,Ende} - w_{z,Ende}}{\Delta Q_{z,2}} \\ \frac{\varphi_{2,Ende} - \varphi_{Ende}}{\Delta Q_{z,2}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{w_{x,3,Ende} - w_{x,Ende}}{\Delta M_{y,3}} \\ \frac{w_{z,3,Ende} - w_{z,Ende}}{\Delta M_{y,3}} \\ \frac{\varphi_{3,Ende} - \varphi_{Ende}}{\Delta M_{y,3}} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta N_x \\ \Delta Q_z \\ \Delta M_y \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Zur Verbesserung der numerischen Stabilität des Verfahrens ist es zweckmäßig, die Größe der Inkremente in Abhängigkeit der maximal zu erwartenden Schnittgrößen zu bestimmen.

$$\Delta N_{x,1} = \max N_x / 10000 \quad (4.9)$$

$$\Delta Q_{z,2} = \max Q_z / 10000 \quad (4.10)$$

$$\Delta M_{y,3} = \max M_y / 10000 \quad (4.11)$$

$$\Delta \varphi_4 = 0,000001 \text{ [rad]} \quad (\text{konstant}) \quad (4.12)$$

4.2.2 Übertragungsgleichungen

Die benötigten Übertragungsgleichungen für ein Stabelement der Länge dx lassen sich entweder durch mehrmalige Integration der Linienlast herleiten oder durch eine einfache und sehr anschauliche Betrachtung am verformten Stabelement, wie dies im folgenden durchgeführt wird. Zur Bestimmung der Verformungsgrößen wird das Prinzip der virtuellen Arbeit benutzt.

Zur Berechnung der Biegemomente aus Normalkraft (Theorie 2. Ordnung) muss die Verformung des Stabelements bekannt sein. Aufgrund der kleinen Länge des Stababschnitts bzw. der kleinen Verformung Δw_z reicht es jedoch aus, das verformte Stabelement mit einem geraden Verlauf zu approximieren. Die Biegemomente, die sich beim verformten Stabelement aus den Linienlasten n und Δn in Richtung der Stabachse ergeben, werden ebenfalls mit der Näherung eines geraden Stabelementes berechnet.

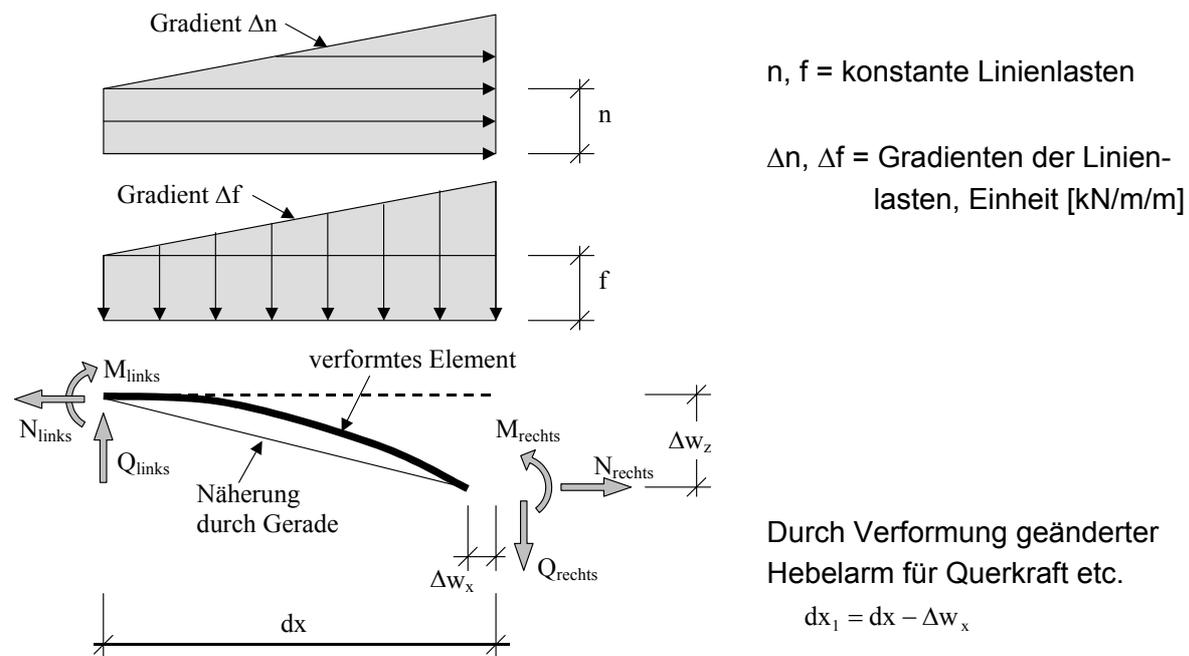


Bild 4.3 Stababschnitt, verformt und unverformt, mit Belastungen und Bezeichnungen

Die Gleichungen für die Veränderungen der Schnittgrößen lauten:

$$dM_y = -\left(\left(\Delta f \cdot \frac{dx}{3} + f\right) \cdot \frac{dx}{2} - Q_z\right) \cdot dx_1 - \left(\left(\Delta n \cdot \frac{dx}{3} + n\right) \cdot \frac{dx}{2} + N_x\right) \cdot \Delta w_z \quad (4.13)$$

$$dQ_z = -\left(\Delta f \cdot \frac{dx}{2} + f\right) \cdot dx \quad (4.14)$$

$$dN_x = \left(\Delta n \cdot \frac{dx}{2} + n\right) \cdot dx \quad (4.15)$$

In den beschriebenen Gleichungen tritt kein Anfangsdrehwinkel auf, da zur Berücksichtigung von Theorie 3. Ordnung am Ende des Stababschnittes alle Zustandsgrößen um den Enddrehwinkel $\Delta\varphi$ rotiert werden (Bild 4.4). Damit ist bei der Berechnung des nachfolgenden Abschnittes der Anfangsdrehwinkel gleich Null.

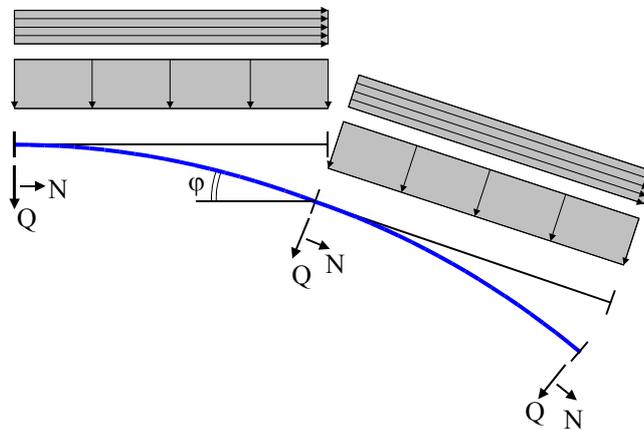


Bild 4.4 Rotation aller Zustandsgrößen und Belastungen am Stabende

Zur Berechnung der Verformung ($\Delta w_z / \Delta\varphi$) wird das Prinzip der virtuellen Arbeit benutzt (Tabelle 4.3). Dazu wird zur Bestimmung der vertikalen Verformung Δw_z eine 1-Kraft aufgebracht, zur Bestimmung der Endverdrehung $\Delta\varphi$ ein 1-Moment. Um die Verformung Δw_x infolge Theorie 3. Ordnung zu berechnen, kommt eine in Kapitel 4.2.5 beschriebene Näherung zum Einsatz. Mit diesen funktionalen Verläufen lassen sich nun für alle Belastungsgrößen die Arbeitsintegrale aufstellen und lösen.

Tabelle 4.3 Virtuelle Größen und zugehörige Moment- und Querkraftverläufe

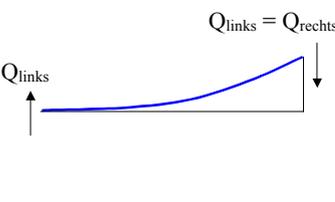
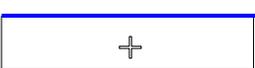
	Virtuelle Kraft $F = 1$		Virtuelles Moment $M = 1$
M	$M = 1 \cdot L$		$M = 1$
Q	$Q = 1$		$Q = 0$

Durch die meist einfachen Funktionen können Tafeln zur Auswertung der Integrale

$$\int_s f(s) \cdot g(s) \cdot ds \quad (4.16)$$

zum Einsatz kommen [1]. Am Beispiel der Querkraft sei die Vorgehensweise in Tabelle 4.4 exemplarisch dargestellt. Alle weiteren Belastungen und die zugehörigen Lösungen der Arbeitsintegrale sind im Anhang A1 abgedruckt.

Tabelle 4.4 Auswertung der Arbeitsintegrale für die Querkraft (Gleichungen 4.17)

		Virtuelle Kraft $F = 1$		Virtuelles Moment $M = 1$		
	Verläufe für Verformung, Moment und Querkraft	Verlauf von M und Q	Koppelwert	Arbeitsintegral	Koppelwert	Arbeitsintegral
Querkraft Q						
		$M = Q_L \cdot L$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6} \cdot L^3 \cdot Q_{links}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot L^2 \cdot Q_{links}$
		$Q = Q_L$	1	$L \cdot Q_{links}$	0	0

Durch das Aufstellen der Gleichungen am verformten System befindet sich beim Lösen der Arbeitsintegrale die unbekannte Verschiebung Δw_z auf beiden Seiten der Gleichung. Dadurch muss diese umgestellt und nach Δw_z aufgelöst werden. Eine Iteration zur Berücksichtigung von Theorie 2. Ordnung ist damit nicht erforderlich.

Die Berechnung der Verformung Δw_x sowie der Verdrehung $\Delta \varphi$ verläuft analog durch das Lösen der Arbeitsintegrale. Die sich ergebenden Gleichungen sind in Tabelle 4.6 und 4.7 dargestellt.

Die Terme der Linienlast (f , Δf , n , Δn) enthalten neben der äußeren, durch den Benutzer aufgetragenen Belastung auch die Reaktion infolge einer elastischen Bettung. Die Änderung dieser Größen infolge Bettung wird in Kapitel 4.2.7 beschrieben.

Tabelle 4.5 Berechnung der Verformung Δw_z (Gleichungen 4.18)

$x_1 = \left(\left(\left(\Delta f \cdot \frac{dx}{5} + f \right) \cdot \frac{dx}{4} - Q_z \right) \cdot \frac{dx}{3} - M_y \right) \cdot \frac{dx}{2} \cdot dx \cdot \frac{1}{B_{II}}$ $- (k_{vor} + k_0) \cdot \frac{dx}{2} \cdot dx$ $- \left(\Delta n \cdot \frac{dx}{4} + n \right) \cdot \frac{dx^3}{6} \cdot \left[\frac{\partial k_z}{\partial N} \right]$ $- \left(\left(\Delta f \cdot \frac{dx}{3} + f \right) \cdot \frac{dx}{2} - Q_z \right) \cdot dx \cdot \frac{1}{GA}$	<p>Biegeverformung infolge äußerer Belastung aus Linienlast (f) und Linienlastgradient (Δf), Anteile aus Querkraft Q_z und Biegemoment M_y</p> <p>Anteil aus Vorverkrümmung k_{vor}, Anteil aus Verkrümmung k_0 (resultiert aus der Berechnung mit Tangentensteifigkeiten)</p> <p>vorzugsweise bei Betonquerschnitten: eine Änderung der Normalkraft ergibt eine Änderung der Verkrümmung</p> <p>Querkraftverformung infolge äußerer Belastung aus Linienlast (f) und Linienlastgradient (Δf) sowie Anteil aus Querkraft Q_z</p>
$x_2 = \left(\left(\Delta n \cdot \frac{dx}{5} + n \right) \cdot \frac{dx}{4} + N_x \right) \cdot \frac{dx}{6} \cdot dx \cdot \frac{1}{B_{II}}$ $- \left(\left(\Delta n \cdot \frac{dx}{3} + n \right) \cdot \frac{dx}{2} + N_x \right) \cdot \frac{1}{GA}$	<p>Einfluss aus Theorie 2. Ordnung, Normalkraft führt zu zusätzlichen Biegemomenten, diese wiederum zu zusätzlichen Verformungen</p> <p>Einfluss aus Theorie 2. Ordnung, zusätzliche Schubverformungen</p>
$\Delta w_z = \frac{x_1}{1 - x_2}$	Umgestellte und nach Δw_z aufgelöste Gleichung

Tabelle 4.6 Berechnung der Verformung Δw_x (Gleichung 4.19)

$\Delta w_x = \left(\left(\Delta n \cdot \frac{dx}{3} + n \right) \cdot \frac{dx}{2} + N_x \right) \cdot dx \cdot \frac{1}{D_{II}}$ $- (\varepsilon_{vor} - \varepsilon_0) \cdot dx$ $- \frac{2 \cdot \Delta w_z^2}{3 \cdot dx}$ $+ \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial M} \right] \cdot dM_y \cdot \frac{dx}{2}$	<p>Längenänderung infolge Normalkraftbelastung</p> <p>Längenänderung infolge Vordehnung ε_{vor} (z.B. Temperatur) und ε_0 (resultierend aus Berechnung mit Tangentensteifigkeit)</p> <p>Verkürzung infolge Theorie 3. Ordnung (Näherungsansatz, siehe Kapitel 4.2.5)</p> <p>Anteil aus Änderung der Dehnung infolge einer Änderung des Biegemoments</p>
---	---

Zur Bestimmung von Δw_x wird die Verformung Δw_z benötigt und geht in Form eines Näherungsansatzes in die Berechnung der Verkürzung mit ein. Damit verkleinert sich aber auch der Hebelarm für die Querkraft in Tabelle 4.5 bei der Ermittlung der vertikalen Verformung um genau den Wert Δw_x . Eine genauere Berechnung wäre demnach nur iterativ möglich. Der Einfluss ist jedoch derart gering, dass auf diesen Mehraufwand verzichtet wird.

Tabelle 4.7 Berechnung der Verdrehung $\Delta\varphi$ (Gleichung 4.20)

$\Delta\varphi = -\left(\left(\left(\Delta f \cdot \frac{dx}{4} + f\right) \cdot \frac{dx}{3} - Q_z\right) \cdot \frac{dx}{2} - M_y\right) \cdot dx \cdot \frac{1}{B_{II}}$ $- \left(\left(\Delta n \cdot \frac{dx}{4} + n\right) \cdot \frac{dx}{3} + N_x\right) \cdot \frac{dx}{2} \cdot \Delta w_z \cdot \frac{1}{B_{II}}$ $+ (k_{\text{vor}} + k_0) \cdot dx$ $+ \Delta N_x \cdot \left[\frac{\partial k_z}{\partial N}\right] \cdot \frac{dx}{2}$	<p>Biegeverformung infolge äußerer Belastung aus Linienlast (f) und Linienlastgradient (Δf), Anteile aus Querkraft Q_z und Biegemoment M_y</p> <p>Einfluss aus Theorie 2. Ordnung, Normalkraft führt zu zusätzlichen Biegemomenten, diese wiederum zu zusätzlichen Verformungen</p> <p>Anteil aus Vorverkrümmung k_{vor}, Anteil aus Verkrümmung k_0 (resultiert aus der Berechnung mit Tangentensteifigkeiten)</p> <p>vorzugsweise bei Betonquerschnitten: eine Änderung der Normalkraft ergibt eine Änderung der Verkrümmung</p>
--	--

Die Berücksichtigung von Einzellasten (F_x , F_z , M_y), Verformungen (φ) sowie Weg- und Drehfedern ist an jedem Zwischenpunkt möglich. Diese müssen nur zu den jeweiligen Kenngrößen sowohl beim Grundsystem als auch bei den Eins-Zuständen addiert werden.

4.2.3 Ermittlung und Berücksichtigung der Steifigkeitswerte

Vor der Berechnung eines Stababschnitts beim Übertragungsverfahren werden mittels einer Querschnittsberechnung die aktuellen Tangentensteifigkeiten ermittelt. Dazu wird in einem ersten Schritt der Dehnungszustand (ε_0 / k_z) zur aktuellen Belastung $N_{x,0}$ / $M_{y,0}$ iterativ ermittelt, wobei die Ergebnisse der Beanspruchung des vorherigen Stababschnittes sehr gute Startwerte darstellen. Infolgedessen sind meist nur ein oder zwei Iterationen notwendig.

Im folgenden genügt es, die Jacobi-Matrix für diesen Dehnungszustand erneut zu bestimmen. Dazu wird die Spannungsintegration zusätzlich für folgende Dehnungszustände durchgeführt

$$1. \quad \varepsilon = (\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_0) + z \cdot k_z \quad \Leftrightarrow \quad N_{x,1} / M_{y,1} \quad (4.21)$$

$$2. \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + z \cdot (k_z + \Delta k_z) \quad \Leftrightarrow \quad N_{x,2} / M_{y,2} \quad (4.22)$$

so dass die Matrix der folgenden Gleichung berechnet werden kann.

$$\begin{pmatrix} dN \\ dM \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{N_{x,1} - N_{x,0}}{\Delta\varepsilon_0} & \frac{N_{x,2} - N_{x,0}}{\Delta k_z} \\ \frac{M_{y,1} - M_{y,0}}{\Delta\varepsilon_0} & \frac{M_{y,2} - M_{y,0}}{\Delta k_z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\varepsilon_0 \\ dk_z \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Damit kann für die Belastungen $(N_{x,0} + 1 / M_{y,0})$ sowie $(N_{x,0} / M_{y,0} + 1)$ der Dehnungszustand als Näherungslösung bestimmt werden, so dass sich die Dehn- und die Biegesteifigkeit bestimmen lassen.

$$\begin{pmatrix} dN \\ dM \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{N_{x,1} - N_{x,0}}{M_{y,1} - M_{y,0}} & \frac{N_{x,2} - N_{x,0}}{M_{y,2} - M_{y,0}} \\ \Delta \varepsilon_0 & \Delta k_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\varepsilon_{0,dN=1} \\ dk_{z,dN=1} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

$$\Rightarrow D_{II} = \frac{\partial N_x}{\partial \varepsilon_0} = \frac{1}{d\varepsilon_{0,dN=1}} \quad (4.25)$$

$$\begin{pmatrix} dN \\ dM \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{N_{x,1} - N_{x,0}}{M_{y,1} - M_{y,0}} & \frac{N_{x,2} - N_{x,0}}{M_{y,2} - M_{y,0}} \\ \Delta \varepsilon_0 & \Delta k_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\varepsilon_{0,dM=1} \\ dk_{z,dM=1} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

$$\Rightarrow B_{II} = \frac{\partial M_y}{\partial k_z} = \frac{1}{dk_{z,dM=1}} \quad (4.27)$$

Da sich bei Stahlbetonquerschnitten im Zustand II und III bei Änderung des Biegemoments auch die Dehnung ändern wird, sind für die Stabwerksberechnung auch folgende Ausdrücke wichtig.

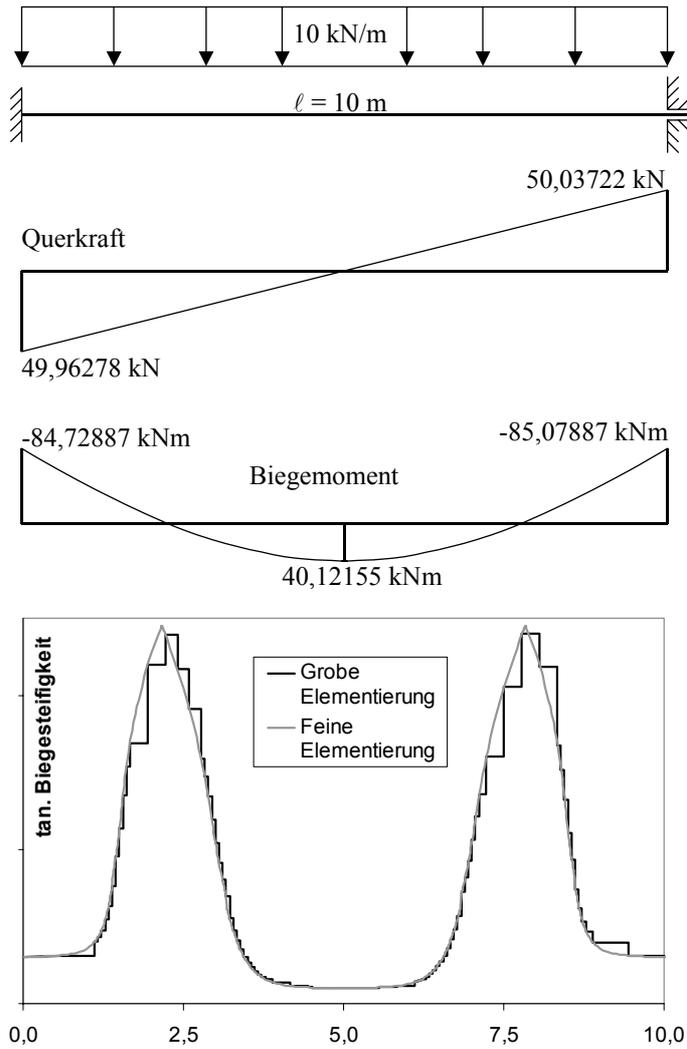
$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial M_y} = \frac{d\varepsilon_{0,dM=1}}{1} \quad \frac{\partial k_z}{\partial N_x} = \frac{dk_{z,dN=1}}{1} \quad (4.28, 4.29)$$

Diese Werte sowie der aktuelle Dehnungszustand mit (ε_0 / k_z) werden an das Übertragungsverfahren zur Berechnung des nächsten Stababschnitts übergeben. Sind die aktuellen Schnittgrößen (N_x / M_y) größer als die Querschnittstragfähigkeit, wird ein Sicherheitsnachweis durchgeführt und an dieser Stelle die Steifigkeiten bestimmt.

Für einen gevouteten Balken erfolgt die Ermittlung der Steifigkeiten analog mit dem Unterschied, dass zu Beginn der Rechnung die Querschnittsabmessungen aktualisiert werden.

Da die Steifigkeiten jeweils für die Beanspruchung (N_x / M_y) am Anfang des Stababschnitts berechnet werden und sich diese Werte am Abschnittsende geändert haben, erhält man bei Nutzung der Tangentensteifigkeit vom Elementanfang nur eine Näherungslösung. In Bild 4.5 wird an einem Einfeldträger beispielhaft gezeigt, welche Steifigkeitsverteilung bei einer groben Elementierung für die Rechnung benutzt wird. Für den gezeigten Fall wird tendenziell die rechte Seite des Balkens zu steif berechnet, so dass die Querkraft dort geringfügig größer wird und auch die Biegemomentenverteilung von der ideal symmetrischen Verteilung abweicht.

Trotzdem die Biegesteifigkeit bei der groben Elementierung in einigen Bereichen vom genauen Wert um mehr als 15% abweicht, beträgt der Fehler bei der Querkraft nur

**System:**Einfeldträger, $\ell = 10,0$ m**Querschnitt:** $b/h/d_1/d_2 = 20 / 100 / 4 / 4$ [cm]

C 30/37 Mittelwerte

BSt 500 Mittelwerte

 $A_{s,u} = 6,4$ cm² $A_{s,o} = 12,8$ cm²**Genauere Lösung, Abweichung:** $Q = \pm 50,0$ kN $\Delta Q = 0,03722044$ kN $\Delta Q / Q = 0,0744$ % $M = -84,90387$ kNm $\Delta M = 0,175$ kNm $\Delta M / M = 0,206$ %

Bild 4.5 Fehler der Näherungslösung bei Nutzung von konstanten Steifigkeitswerten

0,0744% und beim Biegemoment nur 0,206%. Ausschlaggebend ist letztendlich nicht der Fehler bei der tangentialen Biegesteifigkeit, sondern der daraus resultierende Fehler bei der Verkrümmung zur Berechnung der Verformung. In Bild 4.6 ist dieser Zusammenhang dargestellt.

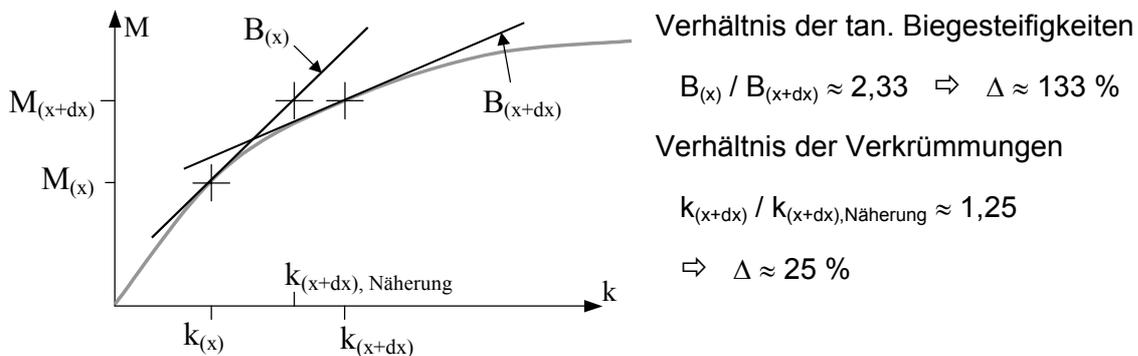


Bild 4.6 M-k-Linie mit benutzter Linearisierung, Abschätzung des Fehlers

Eine mögliche Optimierung des Rechenablaufs könnte sein, in einem ersten Schritt die Verformung mit der Verkrümmung $k_{(x+dx),\text{Näherung}}$ zu bestimmen. Nach Berechnung des Dehnungszustandes am Ende des Stababschnitts für $N_{(x+dx)} / M_{(x+dx)}$ und Bestimmung der Steifigkeitswerte könnte eine Neuberechnung der Verformungen mit verbesserten Werten (z.B. Mittelwerte für B_{II} und D_{II}) erfolgen.

4.2.4 Berücksichtigung der Schubverformung

In der Gleichung zur Berechnung der Verformung w_z sind die Anteile der Schubverformung entsprechend der normalen Balkentheorie enthalten. Für üblich schlanke Tragwerke mit linear-elastischem Materialverhalten ist dieser Anteil an der Gesamtverformung meistens vernachlässigbar. Bei Stahlbetonkonstruktionen sind jedoch bereits bei mäßig schlanken Balken relativ früh einsetzende Schrägrisse zu beobachten, die einen wichtigen Anteil der Gesamtverformung hervorrufen. Bei gedrunenen Balken mit hoher Querkraftbeanspruchung wird die Schubverformung den Hauptteil der Verformung ausmachen.

Die Schubverformung insbesondere bei Rissbildung ist auf Grund der vielfältigen Eingangsparameter meist nur sehr aufwändig zu ermitteln. Können bei kleinen Querkraft- und Momentenbeanspruchungen die Schubspannungen und daraus resultierende Verformungen noch näherungsweise mit der normalen Balkentheorie berechnet werden, so wird sich bei größeren Beanspruchungen ein Fachwerk mit deutlich unterschiedlichem Tragverhalten ausbilden. In diesem Fall müssten die Betondruckstrebe, die vertikale Zugstrebe sowie Druck- und Zuggurte in Tragfähigkeit und Verformungsverhalten analysiert werden. Eine sich durch das Versatzmaß ergebende Veränderung der Zuggurtkräfte sollte in die Berechnung ebenfalls einfließen.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Querkrafttragfähigkeit insbesondere für unterschiedliche Normalkraftbeanspruchungen und die Verformung infolge Schubbeanspruchung zum jetzigen Zeitpunkt noch Gegenstand intensiver Forschungen sind. Aus diesem Grund wird davon abgesehen, vorhandene Modelle aus der Literatur zu untersuchen und zu übernehmen oder ein eigenes komplexes Modell zu entwickeln.

Stattdessen wird eine sehr einfache Näherung vorgeschlagen, die im Programm Stab2D-NL mit geringem Aufwand implementiert werden konnte. Wesentliche Grundvoraussetzung ist, dass eine ausreichende Querkrafttragfähigkeit des Querschnitts vorhanden ist, da eine Überprüfung nicht stattfindet.

Bei kleinen Beanspruchungen verbleibt der Querschnitt im ungerissenen Zustand und die linear-elastischen Werte für Biege- und Schubsteifigkeit sind für eine genaue Verformungsberechnung ausreichend. Bei größeren Beanspruchungen reißt der Querschnitt auf und entsprechend der Kombination aus Biegemoment und Normalkraft wird sich eine

bestimmte Dehnungsebene mit zugehörigem Spannungszustand ergeben, der zur Bestimmung der tangentialen Dehn- und Biegesteifigkeit benutzt wird. Eine sehr einfache Annahme für die Bestimmung der Schubverformung ist nun, dass die Schubsteifigkeit mit dem gleichen Verhältnis wie die Biegesteifigkeit entsprechend folgender Formel abnimmt:

$$S_{II} = \frac{B_{II,tan}}{EI} \cdot GA \quad (4.30)$$

Der Hintergrund dieser Näherung lässt sich erklären, indem man Biege- und Querkraftbeanspruchung getrennt für sich betrachtet. Beim Steigen der Beanspruchung von N_x und M_y wird der Balken entsprechend der Spannungs-Dehnungs-Linie nichtlinear verformt. Durch die Beanspruchung des Materials in Richtung der Balkenachse verringert sich jedoch nicht nur in dieser Richtung die Steifigkeit, sondern auch die Steifigkeit senkrecht dazu für den Querkraftabtrag. Wird erst jetzt gedanklich die Querkraft aufgebracht, dann muss sich eine Schubverformung entsprechend der jetzt vorhandenen Schubsteifigkeit ergeben.

Es ist offensichtlich, dass mit dieser einfachen Näherung für Experimente zur Querkrafttragfähigkeit kaum zufriedenstellende Nachrechnungen erzielt werden können, da keiner der weiter oben beschriebenen Sachverhalte wie Schubrissbildung oder Versagen der Schubbewehrung explizit Eingang in die Berechnung findet. Dennoch ist es als Näherung für mäßig schlanke Balken geeignet, da zumindest die Tendenz berücksichtigt wird, dass bei stark gerissenen Querschnitten auch die Schubverformungen größer werden.

4.2.5 Theorie 3. Ordnung

Durch die Verwendung des Übertragungsverfahrens für die Berechnung eines Stabes können Effekte infolge Theorie 3. Ordnung sehr einfach implementiert werden. Da der Balken bereits zu Beginn der Rechnung in mehrere Abschnitte unterteilt wird, reicht es aus, den Einfluss großer Verformungen an einem kleinen Stabelement der Länge dx als Näherungslösung zu formulieren.

Sowohl die Annahme eines Parabelförmigen Verlaufs mit einer konstanten Verkrümmung über den gesamten Abschnitt (Bild 4.7 a) als auch die Annahme eines geraden, nur verdrehten Elements (Bild 4.7 b) können eine gute Approximation der wirklichen Verformung sein. Die sich ergebenden Näherungsgleichungen zur Berechnung der Verkürzung Δx sind jeweils angegeben, die genaue Herleitung befindet sich im Anhang A2.

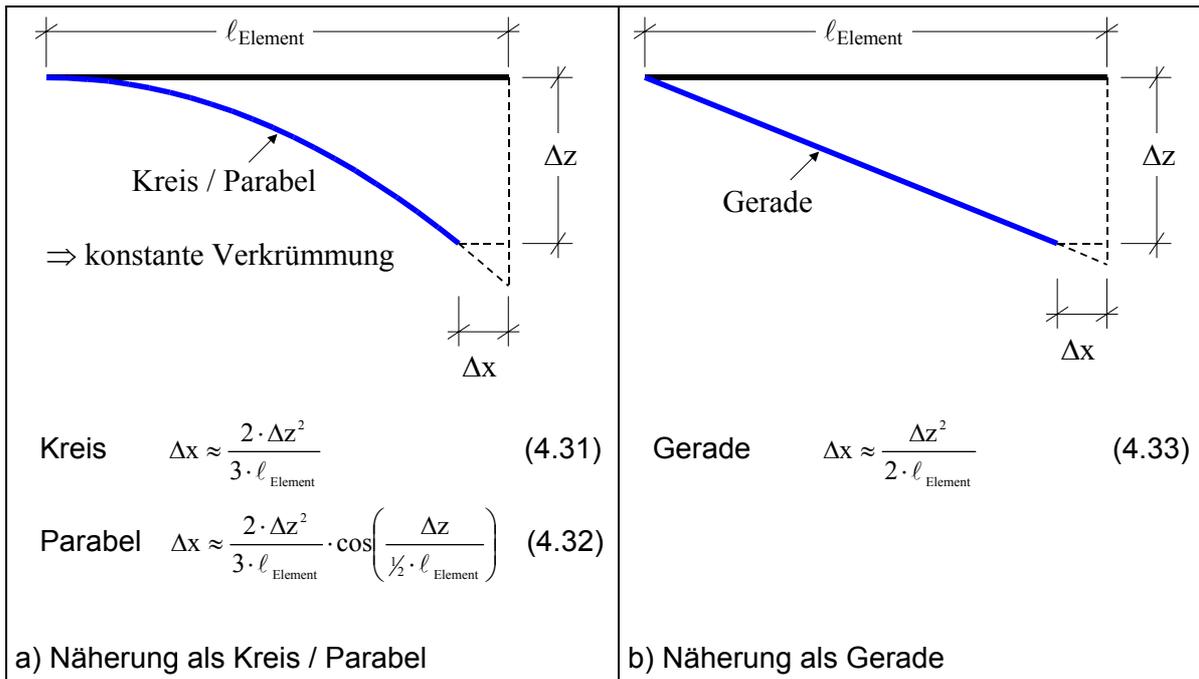


Bild 4.7 Näherungslösungen zur Berücksichtigung großer Verformungen

Durch Vergleichsrechnungen mit den verschiedenen Modellierungen ergab sich, dass die Annahmen eines Kreis- bzw. Parabelförmigen Verlaufs für eine konstante Momentenbeanspruchung sehr gute Näherungen sind. Für den in Bild 4.8 gezeigten, einseitig eingespannten Stab mit $\ell = 2 \cdot \pi$ ($EI = 1 \text{ kNm}^2$) sind die Ergebnisse in Abhängigkeit der Elementierung dargestellt. Durch die Wahl der Eingangswerte ergibt sich bei der gezeigten Belastung von $M = 1 \text{ kNm}$ ein Kreis mit dem Radius $r = 1 / k = 1,0 \text{ m}$ als exakte Lösung und damit eine Verschiebung des rechten Knotens von $w_x = 2 \cdot \pi = 6,283 185 307 \text{ m}$.

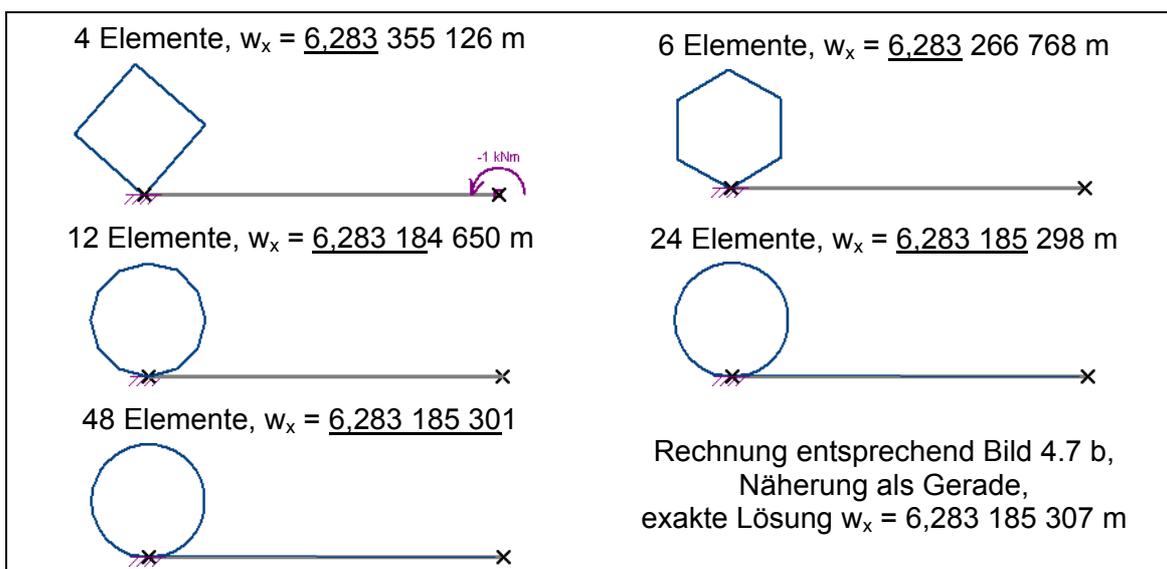


Bild 4.8 Vergleich unterschiedlich feiner Stabunterteilungen

Nach Berechnung der Verformung für ein Stabelement sind sowohl die inneren Schnittgrößen als auch die äußeren Belastungen nicht mehr senkrecht zur Stabachse ausgerichtet. Der weitaus wichtigere Schritt zur Berücksichtigung großer Verformungen ist deshalb, alle Größen am Ende des Stabelements durch eine einfache Rotation wieder in das Bezugssystem der lokalen Stabachse zu transformieren.

$$\begin{pmatrix} Q_{i+1} \\ N_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_i \\ N_i \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

$$\begin{pmatrix} f_{i+1} \\ n_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_i \\ n_i \end{pmatrix} \quad \text{Linienlasten} \quad (4.35)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta f_{i+1} \\ \Delta n_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta f_i \\ \Delta n_i \end{pmatrix} \quad \text{Gradienten der Linienlasten} \quad (4.36)$$

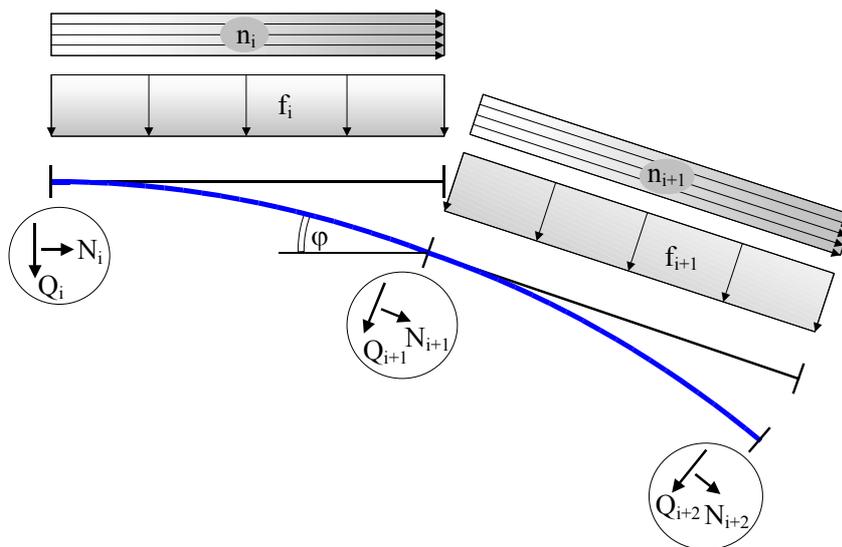


Bild 4.9 Berücksichtigung großer Verformungen durch Rotation aller Stabkenngrößen in das neue Bezugssystem am Ende eines jeden Stabelements

Bereits bei einer üblichen Teilung des Balkens ergeben sich zwischen den gezeigten Näherungen mittels Gerade und mittels Parabel / Kreis nur unmerkliche Unterschiede, so dass bei einer Vielzahl von gerechneten Beispielen die Anzahl der Iterationen nahezu gleich war. Tendenziell liefert die Näherung mittels Parabel / Kreis geringfügig genauere Ergebnisse sowie ein ebenfalls etwas besseres Konvergenzverhalten, weshalb diese Methode in das Programm Stab2D-NL implementiert wurde.

Den größeren Anteil des Fehlers liefert bei einer groben Elementierung und großen Verformungen jedoch die Berechnung der vertikalen Verformung Δw_z .

4.2.6 Diskontinuitätsbereiche

Rahmenecken, Querschnittsprünge, Aussparungen oder Kräfteinleitungen stellen Bereiche in einem Rahmensystem dar, in denen die Annahme vom Ebenbleiben des Querschnitts (Bernoulli-Hypothese) nicht mehr erfüllt ist. Die resultierende Spannungsverteilung wird signifikant vom einaxialen Zustand abweichen. Die Beanspruchbarkeit und das Verformungsverhalten hängen außerdem in starkem Maße von der Bewehrungsführung ab. Eine Modellierung dieser Bereiche kann daher nur als Näherung betrachtet werden und erfordert zudem Erfahrung seitens des Anwenders.

Einleitungsbereiche von Einzellasten, Momentenausrundung

Für eine realitätsnahe Modellierung des Tragwerks ist die Erfassung von Lasteinleitungsbereichen bei der Wirkung von Einzellasten oder Auflagerkräften wichtig. Mit der einfachen Annahme, dass sich die am Querschnittsrand angreifenden äußeren Lasten ausbreiten, kann eine bessere Übereinstimmung mit Experimenten erzielt werden. So steht z.B. durch die Ausbreitung der Auflagerkraft über einem Mittelaufleger bei der nichtlinearen Rechnung ein längerer Bereich großer Verkrümmungen zur Verfügung, so dass sich ein Durchlaufträger ausreichend verformen kann und die Biegemomente entsprechend umgelagert werden.

In Bild 4.10 (links) ist ein einfaches Fachwerkmodell für den Abtrag einer lokal wirkenden Linienlast dargestellt. Die Druckstreben am Rand breiten sich unter einem Winkel von 45° bis zur Lage der Zugbewehrung aus. Dadurch ist die äußere Last auf einer größeren Länge verteilt und verursacht damit ein geringeres Biegemoment im Balken. Bedingt durch die Lastausbreitung und daraus resultierender Umlenkkräfte wirken jedoch zusätzliche Druckkräfte in der Betondruckzone sowie zusätzliche Zugkräfte in der Bewehrung, so dass das Biegemoment unterhalb der Lasteinleitung andererseits wieder größer wird.

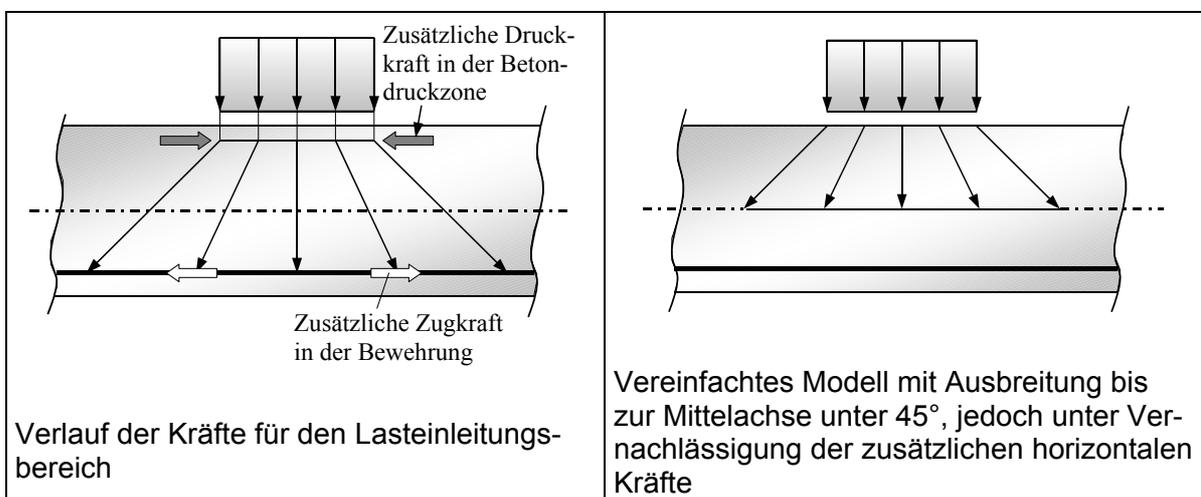


Bild 4.10 Verlauf der Kräfte und benutzte Vereinfachung

Da diese zusätzlichen Zug- und Druckkräfte in einem Balken-Modell nur schwer erfasst werden können, wird die Lastausbreitung entsprechend Bild 4.10 (rechts) vereinfacht. Auch hier ergibt sich durch die angenommene Ausbreitung der Lasten in Höhe der Mittellinie des Querschnitts eine zusätzliche Zugkraft, die dazu führt, dass Spannung und Dehnung in der Zugbewehrung leicht ansteigen und damit die Tragfähigkeit etwas abnimmt, die Verformungen etwas zunehmen. Andererseits sorgt der mehraxiale Spannungszustand im Beton unter der Lasteinleitungsstelle für eine Verringerung der Betondehnungen und eine leichte Erhöhung der aufnehmbaren Spannung. Der innere Hebelarm wird damit ebenfalls leicht ansteigen und zu einer geringen Erhöhung der Tragfähigkeit führen.

Zwar werden sich die beschriebenen Effekte nicht gegenseitig zu Null aufheben, im Rahmen der möglichen Genauigkeit bei Stahlbetonkonstruktionen wird jedoch auf eine weiter verfeinerte Modellierung verzichtet. Auch bestätigen Nachrechnungen von Experimenten die Brauchbarkeit dieser Modellierung.

Die Kraftausbreitung bei einem Auflager und die daraus resultierende Ausrundung des Biegemoments kann bei einer programmgesteuerten Berechnung automatisch berücksichtigt werden. In einem ersten Schritt wird dazu die vorläufige Auflagerkraft A bestimmt, die in den folgenden Rechnungen als äquivalente Auflagerpressung $f_{\text{Aufl.}}$ auf die benachbarten Stäbe aufgebracht wird. Durch die nachfolgenden Iterationen werden die Werte für Auflagerkraft und Auflagerpressung verbessert.

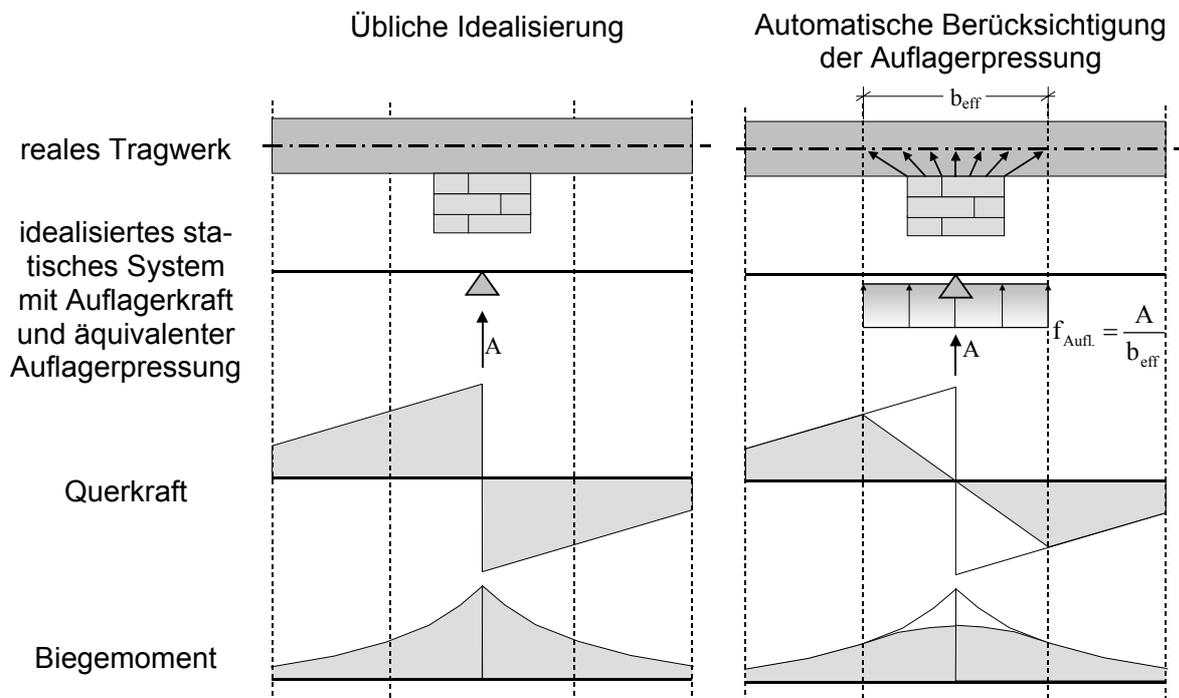


Bild 4.11 Ausbreitung einer Einzelkraft bis zur Mittellinie des Querschnitts am Beispiel eines Durchlaufträgers

Rahmenecken, Querschnittsprünge

Auch bei der Modellierung dieser Diskontinuitätsbereiche müssen Vereinfachungen getroffen werden. Für die Rahmenecke sind in Bild 4.12 und 4.13 zwei Möglichkeiten aufgeführt. Zum einen können die Querschnitte der angrenzenden Balken bis ca. $h/4$ weitergeführt werden, wobei h die Querschnittshöhe des jeweils anderen Balkens darstellt.

Eine andere Möglichkeit ist die Modellierung eines gevouteten Balkens vom Anschnitt bis zum Mittelpunkt der Rahmenecke. Bei Wirkung eines negativen Biegemoments wird bei Betrachtung eines möglichen einfachen Fachwerkmodells (Bild 4.13, links) der innere Hebelarm in der Rahmenecke größer, was durch leicht vergrößerte Querschnittsabmessungen modelliert werden kann.

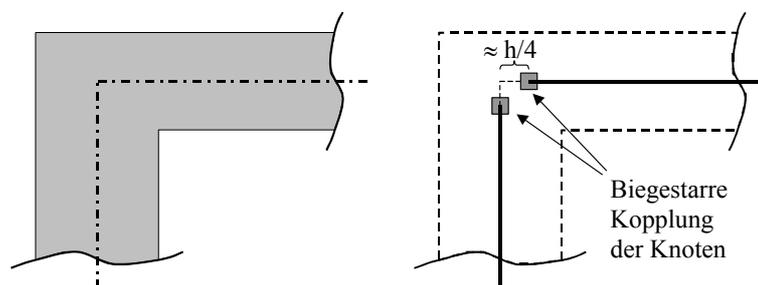


Bild 4.12 Modellierung mittels biegestarr gekoppelter Knoten

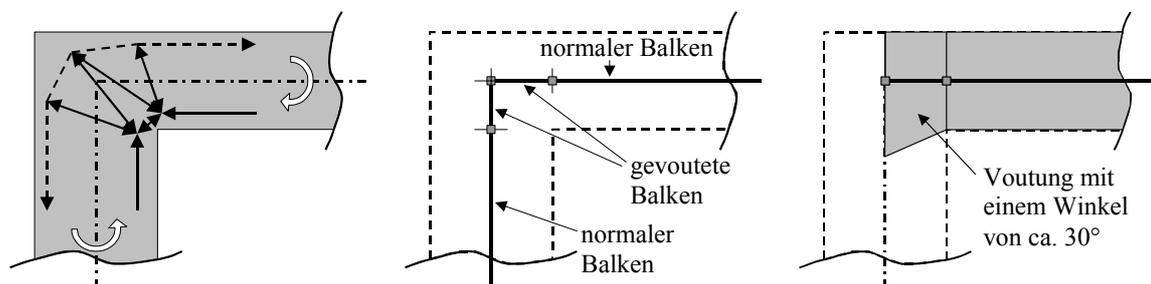


Bild 4.13 Einfaches Fachwerkmodell und Modellierung mittels gevouteter Balken

Auch bei Querschnittsänderungen bietet es sich an, einen gevouteten Stababschnitt zu benutzen, um die allmähliche Änderung der Normalspannungen zu berücksichtigen.

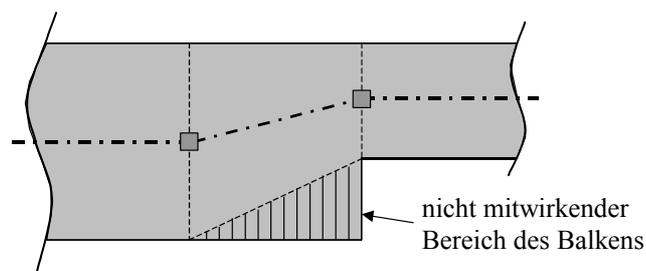


Bild 4.14 Modellierung bei plötzlicher Änderung des Querschnitts

4.2.7 Elastische Bettung

Eine häufige Anwendung ist die Berechnung elastisch gebetteter Balken für Fundamente. Aber auch zur Berechnung von Kreiszylinder- oder Kegelschalen mit rotations-symmetrischen Belastungen lässt sich die Modellierung als elastisch gebetteter Balken sehr gut einsetzen.

Für viele kommerziell arbeitende Programme reicht es auf Grund einer hohen Anzahl und der Verwendung kleiner Elemente häufig aus, an den Elementknoten diskrete Federn mit einer je nach Elementgröße zu bestimmenden Federsteifigkeit zu generieren. Bei mangelnder Erfahrung des Nutzers kann es jedoch vorkommen, dass man bei einer zu groben Elementierung fehlerhafte Ergebnisse erhält, wie es in [2] beschrieben wird. Um derartige Fehler zu vermeiden, wurde im vorliegenden Programm Stab2D-NL eine kontinuierliche elastische Bettung implementiert, die zudem nichtlinear definiert sowie vom Stabanfang bis zum Stabende linear verändert werden kann. So ist es zum Beispiel möglich, die mit der Tiefe zunehmende und nichtlinear veränderliche Bettungssteifigkeit bei vertikalen Pfählen gut abzubilden.

Aus der elastischen Bettung ergibt sich in Abhängigkeit der aktuellen Verformung eine Linienlast auf den Balken, die bei den in Kapitel 4.2.2 hergeleiteten Übertragungsgleichungen berücksichtigt werden muss. Bei einer konstanten Federsteifigkeit wäre es möglich, die resultierende Gleichung mit den Arbeitsintegralen zur Verformungsberechnung nach Δw_z aufzulösen. Die Algorithmen im Programm ABaS [3] beruhen auf dieser Methode.

Durch den möglichen nichtlinearen Verlauf der Bettungssteifigkeit muss jedoch eine iterative Methode an jedem Stababschnitt zum Einsatz kommen. Dazu wird bei der Berechnung der Übertragungsgleichungen eine Bettungsreaktion am Segmentanfang exakt bestimmt sowie für das Segmentende geschätzt. Diese Werte werden als zusätzliche äußere Linienlasten (f , Δf , n , Δn) aufgebracht und zur Verformungsrechnung genutzt. Mit der sich ergebenden Endverformung w_z kann eine neue Bettungsreaktion am Segmentende bestimmt und damit eine neue Verformungsrechnung durchgeführt werden. Im Normalfall ist die Genauigkeit nach ein oder zwei Iterationsschritten ausreichend.

Wie in Bild 4.15 zu sehen ist, können mit dieser Methode bei gegebener Teilung der Stababschnitte die Änderungen in der Bettungssteifigkeit nur näherungsweise erfasst werden, da eine feinere Unterteilung nicht stattfindet. Eine weitere Näherung ist die Annahme eines linearen Verlaufs der resultierenden Belastung aus elastischer Bettung. Bei üblicher Teilung des Stabes haben derartige Fehler jedoch keinen nennenswerten Einfluss auf das Konvergenzverhalten und auf die Genauigkeit der Ergebnisse.

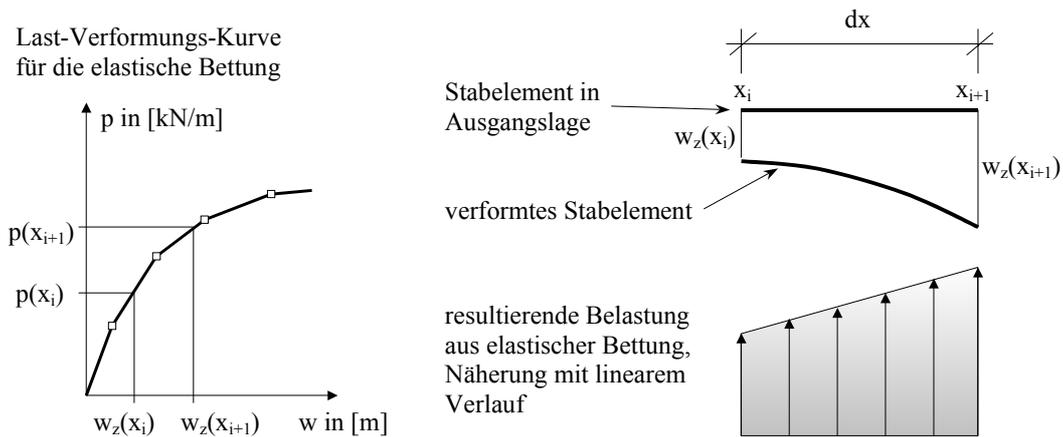


Bild 4.15 Ermittlung der Reaktion aus elastischer Bettung des Stabes

Die mathematischen Lösungen der Differentialgleichung für einen elastisch gebetteten Balken für ein Anfangsmoment oder eine Anfangsquerkraft bestehen aus einem Sinus- oder Cosinus-Term, also einer periodischen Schwingung, die durch eine Exponentialfunktion ($e^{-\xi}$) gedämpft wird. In Bild 4.16 ist beispielhaft die Lösung für eine Einzelkraft am Rand dargestellt.

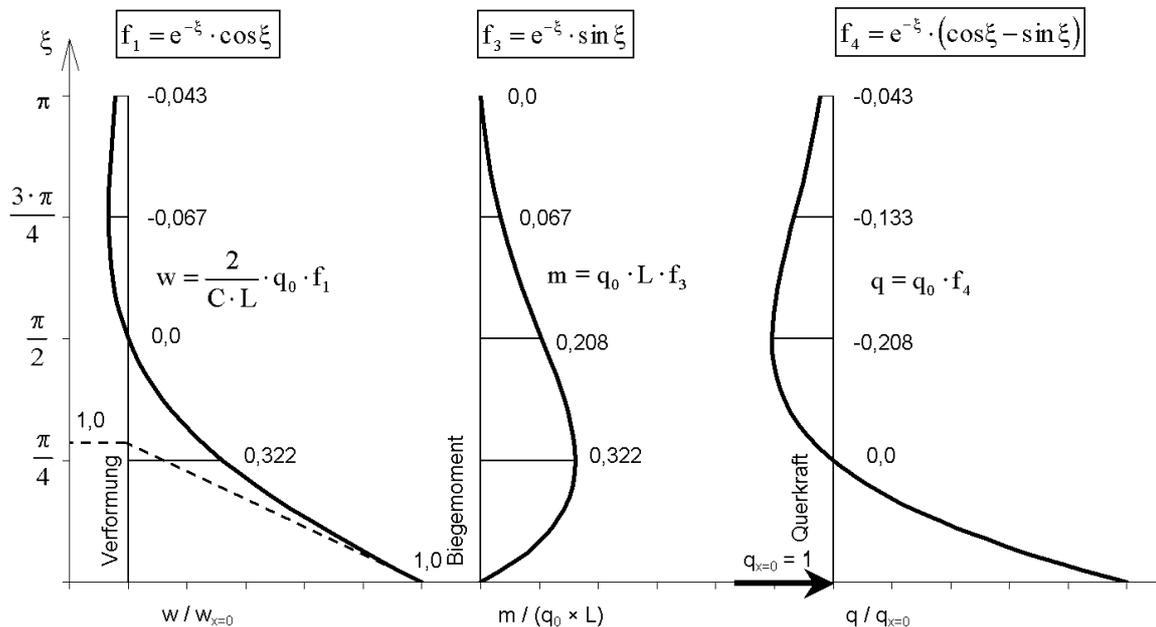


Bild 4.16 Lösung der DGL für einen elastisch gebetteten Balken mit Einzelkraft am Rand

Je nach Anfangsbedingung (Verformung, Schnittgrößen) kann es durch die Benutzung des Übertragungsverfahrens passieren, dass ein Anfangswert im Verlauf der Übertragung sehr stark gedämpft wird. Aber auch das Gegenteil kann eintreten, dass sich die Werte sehr stark „aufschaukeln“ und sehr große Verformungen und Schnittgrößen resultieren.

Die starke Dämpfung im ersten Fall kann dazu führen, dass eine am Stabanfang inkrementell aufgebrachte Größe Δ bei der Berechnung der Eins-Zustände am Stabende nur noch eine sehr kleine Auswirkung hat, die mit der begrenzten Genauigkeit der Zahlen (15-16 signifikante Stellen) numerisch nicht mehr erfassbar ist. Die benutzten Näherungslösungen für das Übertragungsverfahren setzen die Genauigkeit noch weiter herunter, so dass keine ordentlichen Gradienten für die Jakobimatrix mehr gebildet werden können.

Im zweiten Fall führt die Exponentialfunktion dazu, dass sich kleine Startwerte stark „aufschaukeln“ und die Schnittgrößen und Verformungen plötzlich um einige Zehnerpotenzen größer als die endgültige Lösung sind (siehe Bild 4.17). Was bei linear-elastischen Steifigkeitswerten noch relativ unproblematisch ist, kann bei Benutzung eines Stahlbetonquerschnitts mit nichtlinearem Verhalten schnell zum Überschreiten der Tragfähigkeit führen. Zwar wird versucht, die Berechnung des Stabes mit einer „künstlich“ angenommenen Biegesteifigkeit fortzusetzen, die daraus resultierenden Gradienten zur Bestimmung der Jakobimatrix erweisen sich jedoch auch hier meist als unbrauchbar.

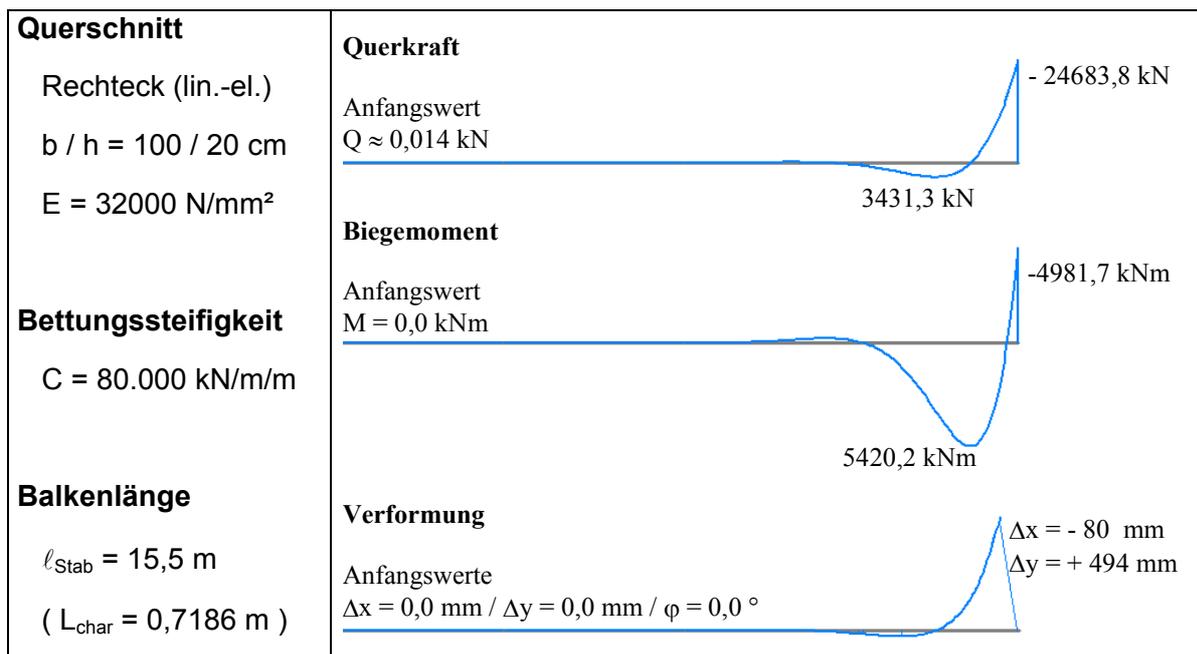


Bild 4.17 Elastisch gebetteter Balken mit kleinem Anfangswert für die Querkraft und großer Reaktion am Balkenende

Aus diesen Gründen versagt das Übertragungsverfahren bei Stablängen, die größer als ca. das 30fache der charakteristischen Länge sind. Ein Wert der Größe $\Delta = 1$ wäre bei $\ell_{\text{Stab}} = 30 \cdot L_{\text{char}}$ auf $\Delta = 9,35 \cdot 10^{-14}$ gedämpft worden. Durch die Berücksichtigung großer Verformungen entsprechend Theorie 3. Ordnung verringert sich die maximale mögliche Stablänge auf ca. das 10 bis 15fache der charakteristischen Länge. Um dennoch größere

bzw. beliebig lange Strukturen ohne Einschränkungen berechnen zu können, sollten diese Balkenzüge in mehrere Stäbe mit jeweils $L_{\text{Stab}} < 10 \cdot L_{\text{char}}$ unterteilt werden.

Für baupraktische Belange sind die benutzten Näherungen ausreichend und die Einschränkungen nicht maßgebend, wie die Berechnung einer Kreiszyinderschale mit freiem oberem Rand und Fuß einspannung in Bild 4.18 zeigt. Zum Vergleich ist die Lösung mit ihren Zahlenwerten eingetragen, die sich beim Lösen der Differentialgleichung für eine unendlich lange Kreiszyinderschale ergibt. Zu beachten ist bei dieser Vergleichsrechnung mit Stab2D-NL, dass die Schubsteifigkeit des Querschnitts einen sehr großen Wert besitzen muss, die Schubverformung also vernachlässigt wird, da diese in den hier benutzten Lösungen der Differentialgleichung der Kreiszyinderschale ebenfalls keine Beachtung findet.

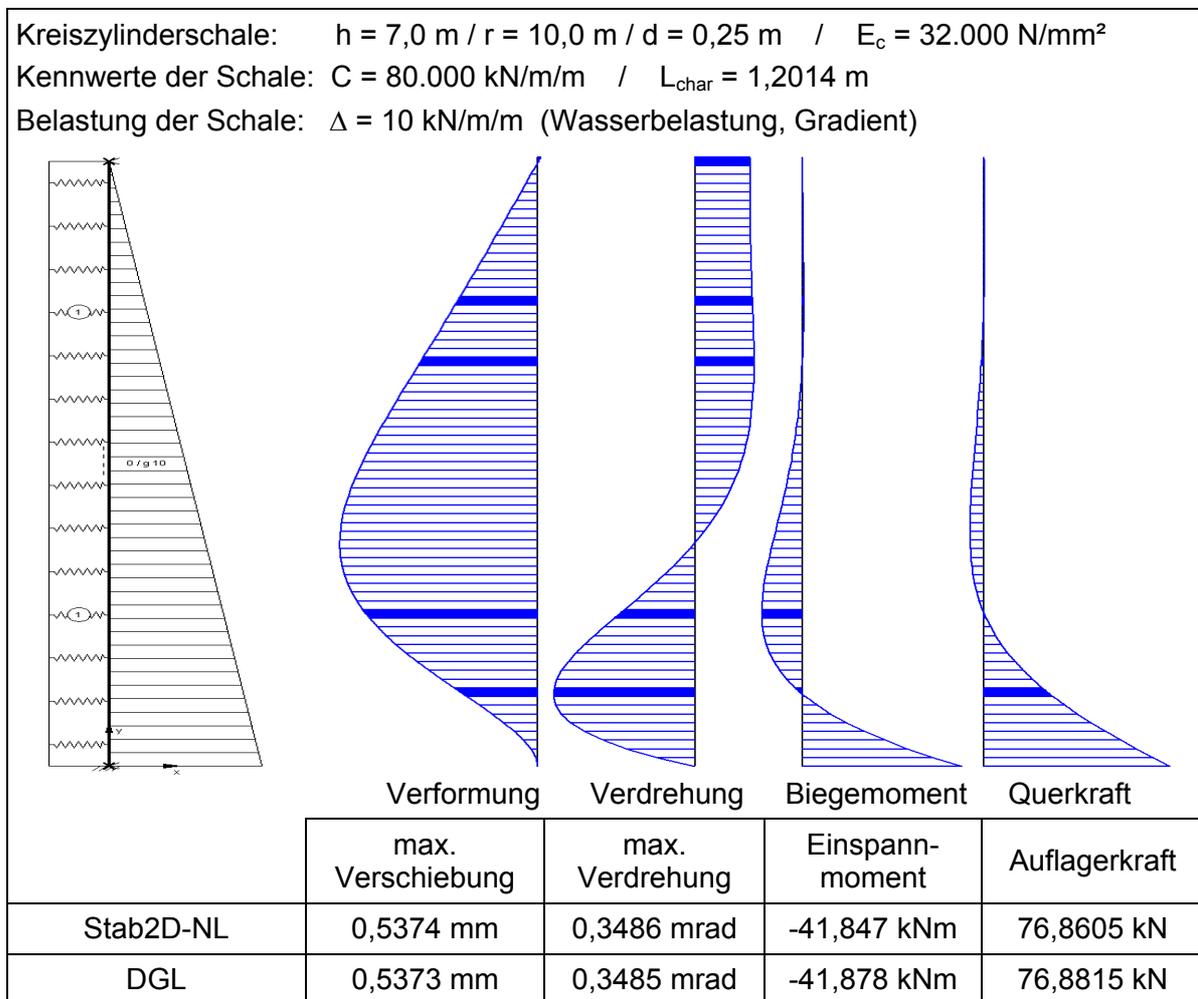


Bild 4.18 Eingangswerte sowie Berechnungsergebnisse für eine Kreiszyinderschale, Rechnung mit Stab2D-NL als elastisch gebetteter Balken und entsprechend der Lösung der Differentialgleichung

4.2.8 Teilung des Stabes

Wichtig für eine hohe Genauigkeit, gutes Konvergenzverhalten und für einen geringen Zeitaufwand für die Rechnung ist eine optimale Teilung des Stabes in Abschnitte. So benötigen Bereiche mit näherungsweise gleichen Biegesteifigkeiten nur eine grobe Elementierung, Bereiche mit sich verändernden Steifigkeitswerten eine entsprechend feinere Teilung.

Aus diesem Grund wird von einer Anfangsteilung ausgehend nach jedem Stababschnitt die Veränderung der Biegesteifigkeit kontrolliert und gegebenenfalls weitere Segmente und Zwischenpunkte eingefügt. Die Berechnung der Übertragungsgleichungen wird für die feinere Teilung wiederholt. Wäre die Momenten-Verkrümmungs-Linie als Polygonzug bekannt, könnte die Elementierung genau den Abschnitten der M-k-Linie folgen, indem die x-Koordinate des Stabes für die Biegemomente an den Knickpunkten der M-k-Linie berechnet wird. Da im vorliegenden Fall die Steifigkeiten jedoch jeweils aktuell berechnet werden und eine linearisierte M-k-Linie nicht bekannt ist, kann eine feinere Teilung nur gleichmäßig erfolgen (Bild 4.19).

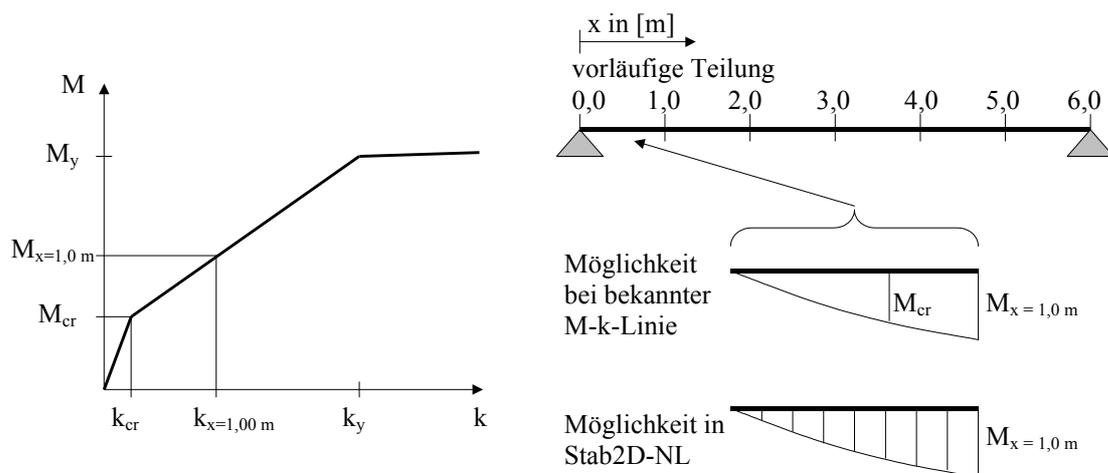


Bild 4.19 Möglichkeiten zur Teilung bei bekannter und bei unbekannter M-k-Linie

Die Kontrolle der Steifigkeitsänderung und das Einfügen weiterer Zwischenpunkte erfolgt entsprechend Gleichung 4.37, wobei die Parameter m und n vom Benutzer zu definieren sind. Die Werte $m = 20$ und $n = 40$ haben sich in den bisherigen Untersuchungen bewährt.

$$\text{Anzahl neuer Zwischenpunkte} = \left\lfloor \frac{B_{II,alt}}{B_{II,neu}} - 1 \right\rfloor \cdot m \leq n \quad (4.37)$$

mit $B_{II,alt} = \tan.$ Biegesteifigkeit bei Position x sowie N_x / M_y

$B_{II,neu} = \tan.$ Biegesteifigkeit bei Position $x + dx$ sowie $N_x + \Delta N_x / M_y + \Delta M_y$

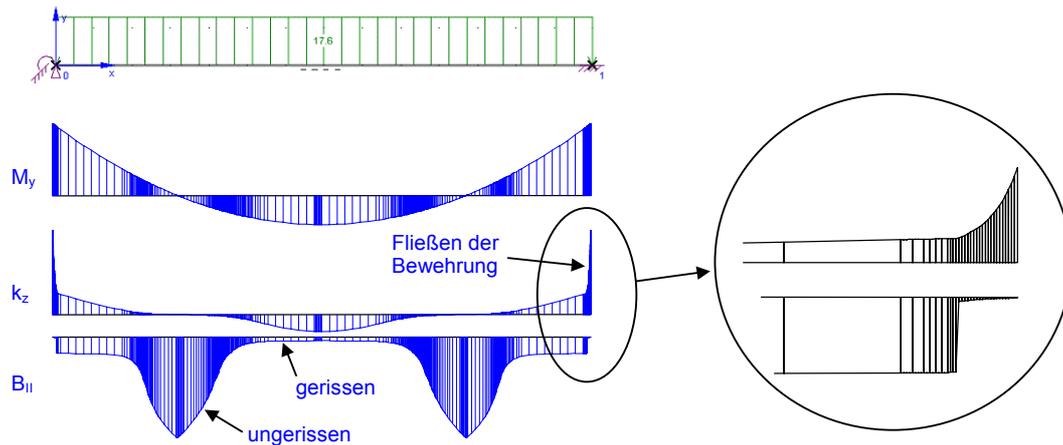


Bild 4.20 Typische Elementierung eines Stahlbetonbalkens, System und Zustandslinien

In Bild 4.20 ist eine typische Elementierung für einen beidseitig eingespannten Stahlbetonbalken dargestellt. Bereiche mit ähnlichen Biegesteifigkeiten (Zustand II) sind in Relation zu den feinen Abschnitten grob elementiert, eine Teilung mit größeren Elementen wäre jedoch noch ausreichend. Ein Geschwindigkeitsvorteil bei der Rechnung würde sich trotzdem nicht ergeben, da in einem derartigen Fall Bereiche mit stark veränderlichen Steifigkeiten noch feiner und häufiger geteilt würden. Auch die Teilung im ungerissenen Bereich bzw. im Übergang zum gerissenen Abschnitt ist eigentlich zu fein gewählt. Da die Verkrümmungen sehr klein und das Arbeitsintegral an dieser Stelle einen ebenfalls sehr kleinen Beitrag zu den Verformungen liefert, könnte in diesem Bereich mit größeren Abschnitten gearbeitet werden. Damit sind Verbesserungen bei der adaptiven Teilung zur Steigerung der Rechengeschwindigkeit durchaus gegeben, im Rahmen der bisherigen Arbeit wurde jedoch auf diesen zusätzlichen Programmieraufwand verzichtet.

Ähnliche Funktionen zur Ermittlung einer feineren Teilung gibt es ebenfalls bei großen Verformungen, bei denen die in Kapitel 4.2.5 gezeigte Näherungslösung für w_x nicht mehr ausreichend genau ist.

Für Stäbe mit elastischer Bettung muss die Teilung bereits zu Beginn der Rechnung in Abhängigkeit der charakteristischen Länge definiert werden. Als ausreichende Abschnittslänge dx wurde in etwa folgender Wert gefunden:

$$\min dx = 0,2 \cdot L_{\text{char}} = 0,2 \cdot \sqrt[4]{\frac{4 \cdot EI}{C}} \quad \text{mit } C = \text{Bettungssteifigkeit in [kN/m/m]} \quad (4.38)$$

Für diese Länge ist die benutzte Näherung zur Berücksichtigung der Belastung aus elastischer Bettung ausreichend genau. Um jedoch das Aufreißen des Querschnitts und die damit verbundene Verkleinerung der charakteristischen Länge eines elastisch gebetteten Balkens von vornherein zu berücksichtigen, ist ein Wert von $\min dx = 0,1 \cdot L_{\text{char}}$ zu empfehlen.

4.3 Weggrößenverfahren / Finite-Elemente-Methode

Die Bezeichnung „Finite Elemente Methode“ ist für das hier benutzte Verfahren eher als übergeordneter Begriff zu verstehen. Im allgemeinen Fall werden unter anderem mit dem Ritzschen Ansatz oder mit dem Galerkin-Verfahren Näherungen der Verschiebung mittels z.B. polynomialer Ansatzfunktionen aufgestellt, da die exakte Antwort eines System auf die Verformung eines Freiheitsgrades nicht bekannt ist. Erst durch Verfeinerung des Systems mit entsprechend kleinen Elementen lässt sich der dabei gemachte Fehler auf ein akzeptables Niveau reduzieren.

Im Gegensatz dazu ist bei Balkentragwerken die Systemantwort und damit die Verschiebung in jedem Punkt des Balkens durch das Lösen der Differentialgleichung exakt bekannt. Damit ist es im Rahmen der Balkentheorie möglich, die exakte Steifigkeitsmatrix aufzustellen, so dass die gefundene Lösung bis auf den verbleibenden Fehler in Abhängigkeit der Abbruchschranke ebenfalls genau ist. So wurde die Berechnung von Balkentragwerken ursprünglich eigentlich nicht als Finite-Elemente-Methode aufgefasst. Durch die Benutzung eines Verschiebungsansatzes entspricht diese Vorgehensweise dem Weggrößenverfahren bzw. im Sonderfall eines unverschieblichen Tragwerkes dem Drehwinkelverfahren.

Unabhängig vom verwendeten Verfahren zum Aufstellen der Steifigkeitsmatrizen können die Spalten der Steifigkeitsmatrix als Kräftevektor interpretiert werden, der benötigt wird, um das System am i-ten Freiheitsgrad mit der Verformung $u_i = 1$ zu verschieben und alle anderen bei $u = 0$ zu belassen. In Bild 4.21 ist dies anhand eines Fachwerksystems mit 6 Freiheitsgraden illustriert.

$$\begin{matrix}
 & \mathbf{K} & \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F} \\
 \begin{pmatrix}
 k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} \\
 k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,2} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} \\
 k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} \\
 k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} \\
 k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} \\
 k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6}
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{1,3} \\ k_{2,3} \\ k_{3,3} \\ k_{4,3} \\ k_{5,3} \\ k_{6,3} \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

Das Diagramm zeigt ein Fachwerk mit sechs Knoten (1 bis 6) und sechs Freiheitsgraden (1 bis 6). Die Knoten sind wie folgt positioniert: Knoten 1 ist ein fest eingespannter Knoten am unteren linken Rand. Knoten 2 ist ein beweglicher Knoten am oberen linken Rand. Knoten 3 ist ein beweglicher Knoten am oberen rechten Rand. Knoten 4 ist ein beweglicher Knoten am unteren rechten Rand. Knoten 5 ist ein fest eingespannter Knoten am unteren rechten Rand. Knoten 6 ist ein beweglicher Knoten am unteren rechten Rand. Die Freiheitsgrade sind: 1 (horizontal, Knoten 1), 2 (vertikal, Knoten 2), 3 (horizontal, Knoten 3), 4 (vertikal, Knoten 4), 5 (horizontal, Knoten 5), 6 (vertikal, Knoten 6). Die Kräftevektorkomponenten $k_{i,3}$ sind an den Knoten eingezeichnet: $k_{1,3}$ (horizontal, Knoten 1), $k_{2,3}$ (vertikal, Knoten 2), $k_{3,3}$ (horizontal, Knoten 3), $k_{4,3}$ (vertikal, Knoten 4), $k_{5,3}$ (horizontal, Knoten 5), $k_{6,3}$ (vertikal, Knoten 6). Die Einheitsverschiebung $u_3 = 1$ ist an Knoten 3 eingezeichnet.

Bild 4.21 Fachwerk mit Einheitsverschiebung bei Freiheitsgrad 3 und zugehörigem Kräftevektor, Gleichung 4.39

4.3.1 Bestimmung der lokalen Steifigkeitsmatrix

Die im vorherigen Abschnitt gezeigte Interpretation der Steifigkeitsmatrix erlaubt damit auf einfache Art und Weise die Berechnung der einzelnen Spalten der K-Matrix. Dazu muss nur für jeden Stab eine Einheitsverformung in entsprechender Richtung aufgebracht und mittels Übertragungsverfahren der benötigte Kräftevektor bestimmt werden, um das verformte System im Gleichgewicht zu halten. Dazu können die bereits für die Iteration beim Übertragungsverfahren berechneten Eins-Zustände benutzt werden. Eine erneute Berechnung des Stabes ist nicht notwendig.

Das Aufstellen der K-Matrix erfolgt sofort im globalen Koordinatensystem durch die Vorgabe der Einheitsverformungen der Knoten.

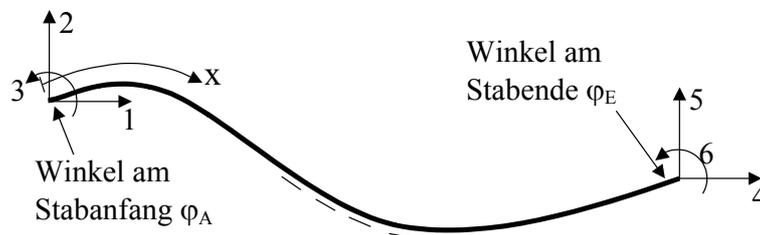


Bild 4.22 Verformter Stab mit Beschriftung der Freiheitsgrade

Die Kräftevektoren der Steifigkeitsmatrix für die Freiheitsgrade 4, 5 und 6 können direkt aus den bekannten Eins-Zuständen des Übertragungsverfahrens bzw. aus der bereits berechneten Jakobi-Matrix J ermittelt werden. Dazu wird die gesuchte Eins-Verformung am Stabende vorgegeben, wobei die Verschiebungsgrößen mit dem Winkel φ_E am Stabende jeweils in das lokale System des Stabes gedreht werden müssen.

$$\text{FG 4} \quad \begin{pmatrix} \Delta w_{x,E} = \cos(\varphi_E) \\ \Delta w_{z,E} = -\sin(\varphi_E) \\ \Delta \varphi_E = 0 \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \Delta N_{x,A} \\ \Delta Q_{z,A} \\ \Delta M_{y,A} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

$$\text{FG 5} \quad \begin{pmatrix} \Delta w_{x,E} = \sin(\varphi_E) \\ \Delta w_{z,E} = \cos(\varphi_E) \\ \Delta \varphi_E = 0 \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \Delta N_{x,A} \\ \Delta Q_{z,A} \\ \Delta M_{y,A} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

$$\text{FG 6} \quad \begin{pmatrix} \Delta w_{x,E} = 0 \\ \Delta w_{z,E} = 0 \\ \Delta \varphi_E = 1 \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \Delta N_{x,A} \\ \Delta Q_{z,A} \\ \Delta M_{y,A} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Durch das Lösen der linearen Gleichungssysteme erhält man nach Rotation der Werte $\Delta N_{x,A}$, $\Delta Q_{z,A}$, $\Delta M_{y,A}$ mit dem Winkel φ_A zurück ins globale Koordinatensystem direkt die ersten drei Werte des Vektors für die lokale Steifigkeitsmatrix (Gleichung 4.43).

$$\begin{array}{l}
\text{bisher berechneter} \\
\text{Teil der lokalen} \\
\text{Steifigkeitsmatrix}
\end{array}
\mathbf{K}_{\text{lokal}} = \begin{pmatrix}
\circ & \circ & \circ & F_{1,4} & F_{1,5} & F_{1,6} \\
\circ & \circ & \circ & F_{2,4} & F_{2,5} & F_{2,6} \\
\circ & \circ & \circ & F_{3,4} & F_{3,5} & F_{3,6} \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ
\end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Ebenfalls durch die Nutzung der Eins-Zustände des Übertragungsverfahrens können die Werte 4 bis 6 der Vektoren bestimmt werden. Es kann eine Jakobi-Matrix aufgestellt werden, die die Veränderung der Schnittgrößen am Ende infolge einer Veränderung am Stabanfang beschreibt. Durch einfache Multiplikation erhält man die Schnittgrößen am Stabende im dortigen lokalen Koordinatensystem. Nach einer Rotation mit dem Winkel φ_E sind auch die restlichen Werte der lokalen Steifigkeitsmatrix für die Freiheitsgrade 4 bis 6 bekannt.

$$\begin{pmatrix}
\Delta N_{x,E} \\
\Delta Q_{z,E} \\
\Delta M_{y,E}
\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}
\left(\frac{N_{x,1,E} - N_{x,E}}{\Delta N_{x,1}} \right) & \left(\frac{N_{x,2,E} - N_{x,E}}{\Delta Q_{z,2}} \right) & \left(\frac{N_{x,3,E} - N_{x,E}}{\Delta M_{y,3}} \right) \\
\left(\frac{Q_{z,1,E} - Q_{z,E}}{\Delta N_{x,1}} \right) & \left(\frac{Q_{z,2,E} - Q_{z,E}}{\Delta Q_{z,2}} \right) & \left(\frac{Q_{z,3,E} - Q_{z,E}}{\Delta M_{y,3}} \right) \\
\left(\frac{M_{y,1,E} - M_{y,E}}{\Delta N_{x,1}} \right) & \left(\frac{M_{y,2,E} - M_{y,E}}{\Delta Q_{z,2}} \right) & \left(\frac{M_{y,3,E} - M_{y,E}}{\Delta M_{y,3}} \right)
\end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix}
\Delta N_{x,A} \\
\Delta Q_{z,A} \\
\Delta M_{y,A}
\end{pmatrix} \quad (4.44)$$

$$\begin{array}{l}
\text{bisher berechneter} \\
\text{Teil der lokalen} \\
\text{Steifigkeitsmatrix}
\end{array}
\mathbf{K}_{\text{lokal}} = \begin{pmatrix}
\circ & \circ & \circ & F_{1,4} & F_{1,5} & F_{1,6} \\
\circ & \circ & \circ & F_{2,4} & F_{2,5} & F_{2,6} \\
\circ & \circ & \circ & F_{3,4} & F_{3,5} & F_{3,6} \\
\circ & \circ & \circ & F_{4,4} & F_{4,5} & F_{4,6} \\
\circ & \circ & \circ & F_{5,4} & F_{5,5} & F_{5,6} \\
\circ & \circ & \circ & F_{6,4} & F_{6,5} & F_{6,6}
\end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Die Vektoren der Steifigkeitsmatrix der Freiheitsgrade 1 und 2 stimmen normalerweise bis auf geänderte Vorzeichen mit den Vektoren 4 und 5 überein, da die Relativverschiebungen in Richtung FG 4 bzw. 5 mit der in Richtung FG 1 bzw. 2 identisch sind. Bei einer konstanten Steifigkeit entlang des gesamten Stabes gilt dies auch für die Freiheitsgrade 3 und 6, wobei hier die Elemente 3 und 6 getauscht werden.

Durch die Berücksichtigung einer elastischen Bettung des Stabes sowie Weg- und Drehfedern sind die Werte für die Freiheitsgrade 1 / 2 und 4 / 5 nicht mehr gleich, sondern beinhalten unterschiedliche Anteile der Reaktion aus der elastischen Bettung. Dieser zusätzliche Anteil entspricht der Auflagersteifigkeit bei der Definition eines Auflagers mit dem Strafverfahren (siehe Kapitel 4.3.3). Als Konsequenz daraus sind auch die Elemente $F_{1,4}$ und $F_{4,4}$ sowie $F_{2,4}$ und $F_{5,4}$ (Siehe Gl. 4.45) nicht mehr identisch.

Infolgedessen müssen die Vektoren 1 bis 3 der Steifigkeitsmatrix in einer weiteren Rechnung bestimmt werden. Dazu werden neben den bereits zuvor berechneten Eins-

Zuständen in der letzten Iteration beim Übertragungsverfahren weitere Eins-Zustände der Verformungskenngrößen übertragen (Tabelle 4.8). Bei vorgegebenen Randbedingungen (Eins-Verformung in Richtung der Freiheitsgrade) müssen jetzt die Änderungen der Schnittgrößen am Anfang derart bestimmt werden, dass am Stabende wiederum alle Randbedingungen erfüllt sind. Durch Nutzung von Gleichung 4.44 können daraus wiederum die Schnittgrößen am Stabende bestimmt werden. Nach Rotation in das globale Koordinatensystem sind die restlichen Werte der lokalen Steifigkeitsmatrix bestimmt.

Tabelle 4.8 Eins-Zustände zur Bestimmung der Steifigkeitsmatrix

Unbekannte Größe	Zu übertragender Eins-Zustand
w_x	$N_{x,4} = N_x / Q_{z,4} = Q_z / M_{y,4} = M_y$ / $w_{x,4} = w_x + \Delta w_x / w_{z,4} = w_z / \varphi_4 = \varphi$
w_z	$N_{x,5} = N_x / Q_{z,5} = Q_z / M_{y,5} = M_y$ / $w_{x,5} = w_x / w_{z,5} = w_z + \Delta w_z / \varphi_5 = \varphi$
φ	$N_{x,6} = N_x / Q_{z,6} = Q_z / M_{y,6} = M_y$ / $w_{x,6} = w_x / w_{z,6} = w_z / \varphi_6 = \varphi + \Delta \varphi_6$

Von Vorteil ist es, wenn neben den in Tabelle 4.8 genannten Eins-Zuständen weitere Zustände übertragen werden, die sich durch Subtraktion der Δ -Werte ergeben, statt wie zuvor beschrieben durch Addition. Anschließend wird die lokale Steifigkeitsmatrix durch elementweise Mittelwertbildung bestimmt. Durch die im folgenden Kapitel beschriebenen Probleme bei der Bestimmung der Steifigkeitsmatrix können dadurch einige Gradienten besser bestimmt und das Konvergenzverhalten verbessert werden.

4.3.2 Probleme bei der Ermittlung der Steifigkeitsmatrix

Bedingt durch die Berücksichtigung der Achsendehnung und großer Verformungen (Theorie 3. Ordnung) ergeben sich Probleme bei der Berechnung der Steifigkeitsmatrix vor allem nach Überschreiten der Fließdehnung der Bewehrung. Insbesondere die Bestimmung der Werte für die Freiheitsgrade 3 und 6 (Rotation) ist bei Stahlbetonquerschnitten in einigen Fällen nicht eindeutig. Relativ häufig hängen die Gradienten davon ab, wie groß das Inkrement Δ für die Eins-Zustände gewählt wurde, da sich die Ableitungen einiger funktionaler Zusammenhänge in einem kleinen Wertebereich relativ stark ändern können.

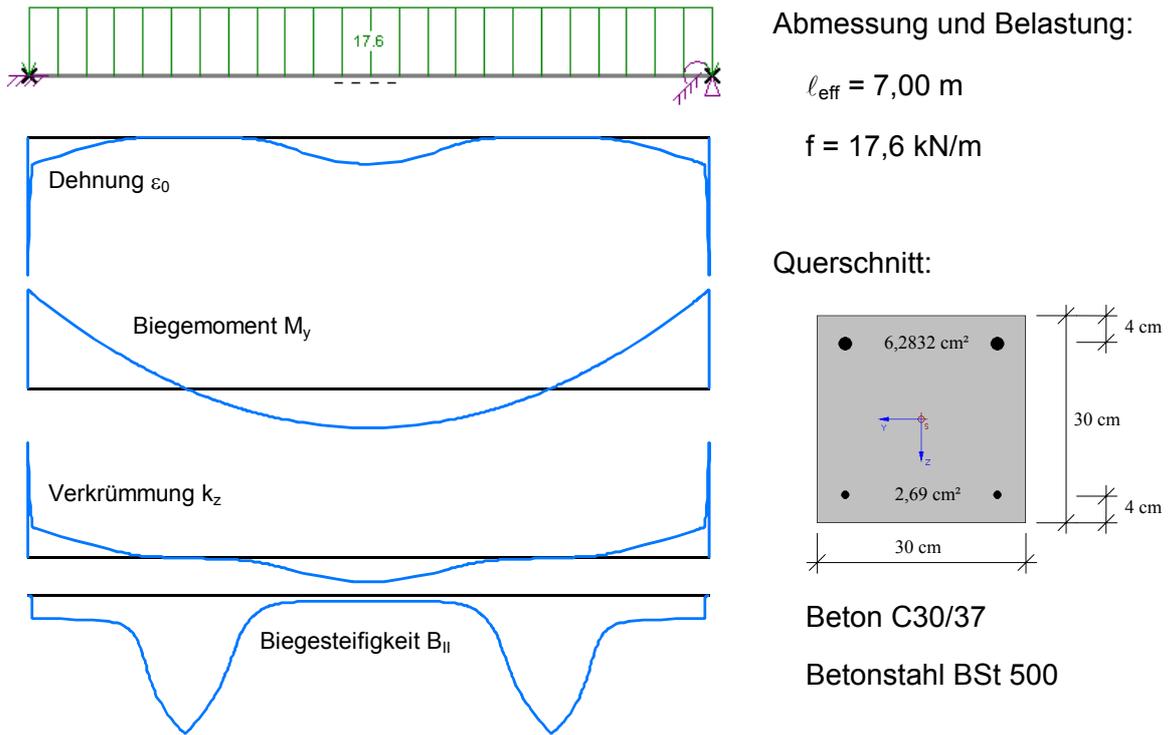


Bild 4.23 Einfeldträger mit Belastung und Querschnittsabmessungen

Das in Bild 4.23 dargestellte System wird durch die gezeigte Belastung bis nahe an den Grenzzustand der Tragfähigkeit beansprucht. Die obere Bewehrung an den Einspannstellen befindet sich bereits im Fließen, wie dies am Verlauf der Verkrümmung sowie der Dehnung zu erkennen ist.

Wird jetzt als Eins-Zustand eine positive Verdrehung am Stabende aufgebracht (Bild 4.24 oben), dann wird das Biegemoment am Stabende und damit auch die Achsendehnung kleiner, am Stabanfang sowie in Feldmitte steigt das Biegemoment jedoch geringfügig an und führt damit auch zu einem weiteren Aufreißen des Balkens in diesen Bereichen. In der Summe würde sich dadurch bei diesem Beispiel eine Verlängerung des Balkens ergeben, die durch eine Drucknormalkraft wieder rückgängig gemacht werden muss. Dadurch ergibt sich für den Eins-Zustand eine Normalkraft von $N_x = -328,1$ kN.

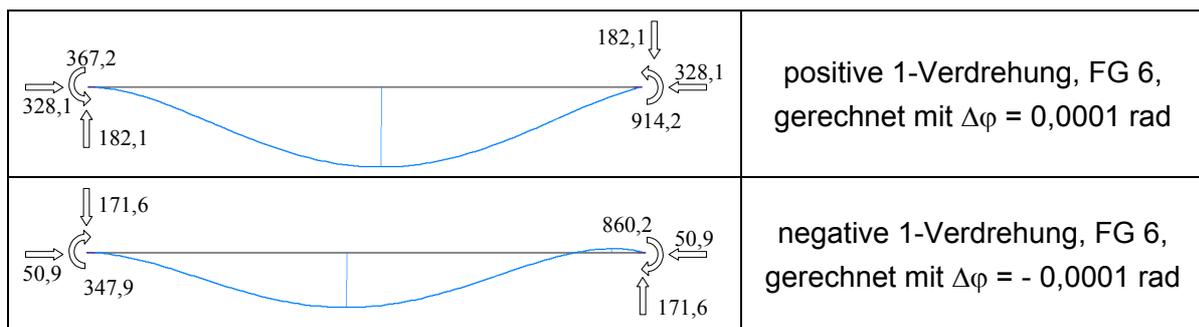


Bild 4.24 Kräfte für Eins-Zustände (FG 6) bei positiver und negativer 1-Verdrehung

Bei einer negativen Verdrehung am Stabende wird im Vergleich zum vorherigen Eins-Zustand das Biegemoment am Stabende größer und demzufolge auch die Achsen-
dehnung. Zwar ergeben sich jetzt am Stabanfang und in Feldmitte kleinere Momente und
Dehnungen, in der Summe überwiegt aber der Einfluss der zusätzlichen Dehnung am
Stabende, so dass sich auch hier eine Verlängerung des Balkens ergeben würde. Durch
eine Drucknormalkraft von $N_x = -50,9$ kN wird diese rückgängig gemacht.

Wie zu sehen ist, befindet sich die Achsenlängsdehnung als Funktion der Stabend-
drehung für das Grundsystem (Bild 4.23) in einem lokalen Minimum, da sich sowohl bei
positiver als auch bei negativer Verdrehung eine Verlängerung des Balkens ergeben
würde. Die anderen Werte des Eins-Zustandes (Einspannmomente, vertikale Auflager-
kräfte) weisen bei positiver und bei negativer Endverdrehung eine jeweils andere
Richtung auf und sind folglich mit korrektem Vorzeichen bestimmt worden. Die Zahlen-
werte selber weichen jedoch geringfügig um bis zu 6,2 % voneinander ab.

Damit kann es vor allem nach Überschreiten der Fließdehnung der Bewehrung dazu
kommen, dass die Steifigkeitsmatrix nicht mehr eindeutig bestimmt werden kann.
Abhängig von der Position der endgültigen Lösung werden die Gradienten der Steifig-
keitsmatrix nur in 50% der Fälle richtig berechnet, in den anderen Fällen „bewegt“ sich die
Näherungslösung weiter von der richtigen Lösung weg.

Auch infolge der Berücksichtigung großer Verformungen (Theorie 3. Ordnung) kann be-
reits bei linear-elastischen Systemen die Steifigkeitsmatrix nicht immer eindeutig bestimmt
werden. Bei dem in Bild 4.25 dargestellten Einfeldträger mit linear elastischem Verhalten
des Querschnitts ergeben sich Normalkräfte mit gleichem Vorzeichen, wenn an Freiheits-
grad 5 eine positive oder eine negative Eins-Verformung aufgebracht wird.

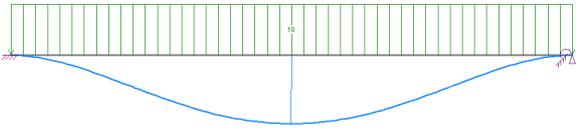
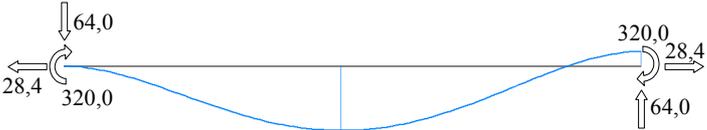
	<p>verformtes Grundsystem, $\ell_{\text{eff}} = 10$ m / Last = 10 kN/m, Querschnitt $b / h = 2,0 / 0,1$ m $E = 32000$ N/mm²</p>
	<p>positive 1-Verschiebung, FG 5, gerechnet mit $\Delta w_z = 0,001$ m</p>
	<p>negative 1-Verschiebung, FG 5, gerechnet mit $\Delta w_z = - 0,001$ m</p>

Bild 4.25 Kräfte für Eins-Zustände (FG 5) bei positiver und negativer 1-Verschiebung

Ist bei der Berechnung für Freiheitsgrad 5 eine Kopplung zwischen vertikaler Verformung und senkrecht dazu wirkender Normalkraft gegeben, so ergibt sich in diesem Beispiel bei Berechnung für Freiheitsgrad 4 keine Kopplung zwischen einer horizontalen Verformung und einer senkrecht dazu wirkenden Querkraft. Eine Kopplung mit dem Biegemoment ist jedoch infolge Theorie 2. Ordnung vorhanden (Bild 4.26).

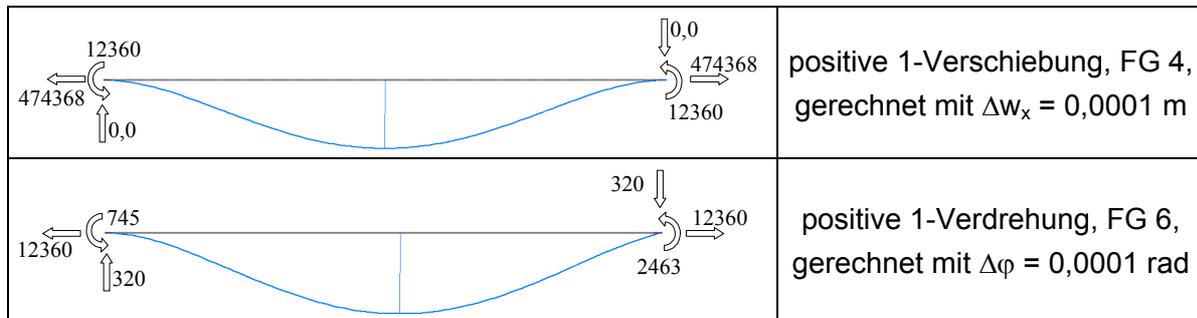


Bild 4.26 Kräfte für Eins-Zustände bei FG 4 und FG 6

Durch Bestimmung der Eins-Zustände jeweils für positive und negative Inkremente Δ ist es möglich, diese Unsymmetrie der Steifigkeitsmatrix zu vermeiden. Dazu wird sowohl für eine Rechnung mit $+\Delta$ als auch für $-\Delta$ die K-Matrix aufgestellt und anschließend elementweise der Mittelwert gebildet. Außerdem werden mit dieser Vorgehensweise Unterschiede bei den Gradienten, wie dies in Bild 4.24 gezeigt wurde, vermieden.

Für das in Bild 4.25 dargestellte, verformte System ergibt sich die resultierende Steifigkeitsmatrix entsprechend Gleichung 4.46. Zum Vergleich ist in Gleichung 4.47 die K-Matrix entsprechend Theorie 1. Ordnung abgebildet.

$$K_{\text{Stab2D-NL}} = \begin{pmatrix} 474368 & 0 & 12360 & -474368 & 0 & -12360 \\ 0 & 64 & 320 & 0 & -64 & 320 \\ 12360 & 320 & 2463 & -12360 & -320 & 745 \\ -474368 & 0 & -12360 & 474368 & 0 & 12360 \\ 0 & -64 & -320 & 0 & 64,0 & -320 \\ -12360 & 320 & 745 & 12360 & -320 & 2463 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

$$K_{\text{linear}} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot EI}{\ell^3} & \frac{6 \cdot EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12 \cdot EI}{\ell^3} & \frac{6 \cdot EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI}{\ell^2} & \frac{4 \cdot EI}{\ell} & 0 & -\frac{6 \cdot EI}{\ell^2} & \frac{2 \cdot EI}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot EI}{\ell^3} & -\frac{6 \cdot EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12 \cdot EI}{\ell^3} & -\frac{6 \cdot EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI}{\ell^2} & \frac{2 \cdot EI}{\ell} & 0 & -\frac{6 \cdot EI}{\ell^2} & \frac{4 \cdot EI}{\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 640000 & 0 & 0 & -640000 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 320 & 0 & -64 & 320 \\ 0 & 320 & 2133 & 0 & -320 & 1067 \\ -640000 & 0 & 0 & 640000 & 0 & 0 \\ 0 & -64 & -320 & 0 & 64 & -320 \\ 0 & 320 & 1067 & 0 & -320 & 2133 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

4.3.3 Berücksichtigung der Auflager

Die Auflager stellen Zwangsbedingungen dar, an denen die Verformung des entsprechenden Freiheitsgrades gleich Null ist. Zur Berücksichtigung dieser Randbedingungen stehen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung.

Durch die Vorgabe eines Auflagers mit $u_i = 0$ bzw. einer Zwangsverformung $u_i \neq 0$ ist die Auflager- bzw. Zwangskraft F_i an dieser Stelle die unbekannte und zu bestimmende Größe. Durch einfaches Umstellen des Gleichungssystems wird erreicht, dass die Kraft F_i im gesuchten Lösungsvektor steht. In den Gleichungen 4.48 und 4.49 ist dies für ein System mit 6 Freiheitsgraden beispielhaft durchgeführt.

Ausgangsgleichung (Auflager bei FG 2, unbekannte Größen mit $\hat{}$ gekennzeichnet):

$$\begin{pmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,2} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} \\ k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ u_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \hat{F}_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Umgestellte Gleichung:

$$\begin{pmatrix} k_{1,1} & 0 & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} \\ k_{2,1} & -1 & k_{2,2} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} \\ k_{3,1} & 0 & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} \\ k_{4,1} & 0 & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} \\ k_{5,1} & 0 & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} \\ k_{6,1} & 0 & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{F}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 - u_2 \cdot k_{1,2} \\ -u_2 \cdot k_{2,2} \\ F_3 - u_2 \cdot k_{3,2} \\ F_4 - u_2 \cdot k_{4,2} \\ F_5 - u_2 \cdot k_{5,2} \\ F_6 - u_2 \cdot k_{6,2} \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

Vorteil dieser Methode ist, dass sich die Größe der Matrix nicht ändert und auch das Lösungsverhalten der Gleichung nicht negativ beeinflusst wird. Durch die Entkopplung der i -ten Spalte vom Rest der Matrix treten trotz der unterschiedlichen Größenordnung der Matrixwerte (1 gegenüber meist sehr großen Steifigkeitswerten) keine numerischen Probleme auf. Die Auflagerkraft ergibt sich direkt aus der Lösung des umgestellten Gleichungssystems. Nachteilig wirkt sich jedoch aus, dass mit dieser Methode nur Auflager direkt in Richtung der Freiheitsgrade modelliert werden können, nicht jedoch in beliebigem Winkel.

Eine zweite Methode ist das sogenannte Straf- oder Penalty-Verfahren, bei dem das Gleichungssystem nicht umgestellt wird. Stattdessen wird an die entsprechende Stelle i der Diagonale der Matrix ein großer Zahlenwert $\alpha_{i,i}$ dazu addiert. Dadurch ergibt sich für diesen Freiheitsgrad eine sehr hohe Steifigkeit ($C = 1E16$) und damit eine geringe Verschiebung u_i , die nahe bei Null liegt. Die Wirkung dieser Addition von $\alpha_{i,i}$ könnte man auch mit einem zusätzlichen Stab der Steifigkeit $\alpha_{i,i}$ vergleichen, der am Freiheitsgrad i angreift.

$$\begin{pmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} \\ k_{2,1} & k_{2,2} + \alpha_{2,2} & k_{2,2} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} \\ k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ u_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \hat{F}_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Um anschließend die Auflagerkraft zu erhalten, muss nur die Verschiebung u_i mit der zugehörigen Lagersteifigkeit C_i multipliziert werden. Vorteil des Strafverfahrens ist weiterhin, dass auch gedrehte Auflager modelliert werden können und nicht nur Festhaltungen in Richtung der Freiheitsgrade. Eine beliebige Ausrichtung des Auflagers kann durch eine einfache Transformation der Steifigkeiten erfolgen:

$$\alpha_{1,1} = C_1 \cdot \cos^2 \varphi + C_2 \cdot \sin^2 \varphi$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,1} = \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (C_2 - C_1)$$

$$\alpha_{2,2} = C_1 \cdot \sin^2 \varphi + C_2 \cdot \cos^2 \varphi$$

$$\begin{pmatrix} k_{1,1} + \alpha_{1,1} & k_{1,2} + \alpha_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} \\ k_{2,1} + \alpha_{2,1} & k_{2,2} + \alpha_{2,2} & k_{2,2} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} \\ k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}$$

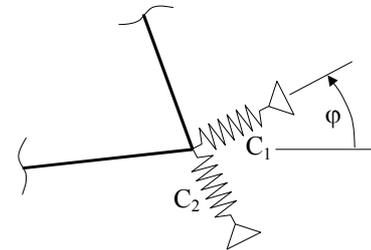


Bild 4.27 Verdrehung eines Auflagers um den Winkel φ , Gleichungen (4.51)

Da die Auflagersteifigkeit frei gewählt werden kann, sind auch elastische Lagerungen möglich. Nachteilig können sich die benutzten großen Zahlenwerte in der Matrix auf das numerische Lösungsverhalten auswirken. Bei Rechnung mit ausreichend signifikanten Stellen konnten bei den bisher untersuchten Systemen keine negativen Auswirkungen festgestellt werden.

Das zuerst beschriebene Verfahren mit dem Umstellen des Gleichungssystems kommt im Programm Stab2D-NL bei Zwangsverformungen in Richtung der Freiheitsgrade ($u_i \neq 0$) zum Einsatz, das Strafverfahren auf Grund seiner vielfältigen Möglichkeiten bei der Modellierung der Auflager.

4.4 Iterationsverfahren, Stabilität und Konvergenz

4.4.1 Newton-Raphson-Iteration

Bei der Berechnung des Gesamtsystems mit dem Weggrößenverfahren kommt das Newton-Raphson-Verfahren zum Einsatz. Dazu wird die tangentielle Steifigkeitsmatrix mit den zuvor beschriebenen Algorithmen ermittelt und für die nicht im Gleichgewicht stehenden Kräfte das Gleichungssystem mittels Gauß-Algorithmus gelöst.

Eine Modifizierung des Verfahrens, d.h., die Wiederverwendung der invertierten globalen Steifigkeitsmatrix aus der vorherigen Iteration ist für das vorgestellte Rechenverfahren nicht sinnvoll. Zur Ermittlung der nicht im Gleichgewicht stehenden Kräfte (Vektor F_i) müssen alle Stäbe mit dem Übertragungsverfahren berechnet werden, so dass die Eins-Zustände zur Ermittlung der lokalen Steifigkeitsmatrizen bereits zur Verfügung stehen. Der zusätzliche Rechenaufwand zum Aufstellen der lokalen Matrizen und zum Zusammenfügen zur globalen Steifigkeitsmatrix ist sehr gering. Weiterhin nimmt das Lösen des Gleichungssystems durch die geringe Anzahl an Freiheitsgraden ebenfalls nur wenig Zeit in Anspruch, so dass kein Grund für eine Modifizierung besteht.

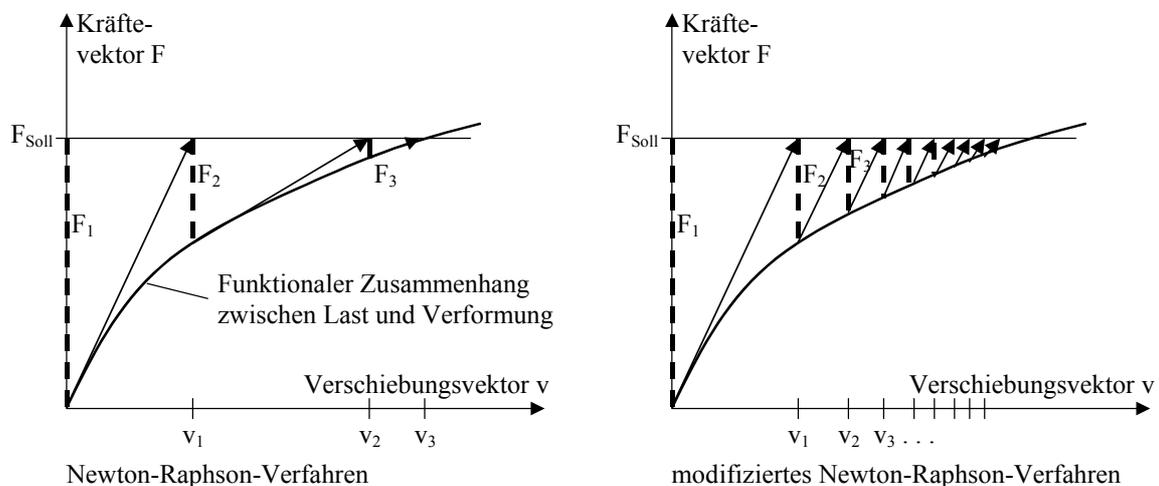


Bild 4.28 Iterationsverfahren nach Newton-Raphson

4.4.2 Ermittlung geeigneter Startwerte

Für die Stabilität und schnelle Konvergenz einer nichtlinearen Berechnung sind gute Startwerte für die Iteration erforderlich. Im ersten Lastschritt wird deshalb bei der ersten Iteration eine lineare Rechnung durchgeführt und die sich ergebenden Knotenverschiebungen und Stabanfangswerte als Startwerte für die folgende nichtlineare Rechnung genutzt.

Ist das Ergebnis für den ersten Lastschritt bzw. allgemein für den Lastschritt n bekannt, so können durch Extrapolation geeignete Startwerte für den folgenden Schritt berechnet werden. Eine denkbare Möglichkeit wäre die lineare Extrapolation der Werte des letzten Lastschrittes (Bild 4.29, links). Im Falle eines nahezu linearen Verhaltens der Struktur sind die so ermittelten Werte sehr gute Startwerte für den nächsten Schritt. Besitzt die Struktur jedoch ein ausgeprägt nichtlineares Verhalten (Bild 4.29, rechts), so ist eine Analyse der letzten Lastschritte und mittels Regression bestimmter Anfangswerte die bessere Wahl. Im Programm Stab2D-NL wird eine quadratische Regression der letzten 3 Werte durchgeführt und die Startwerte für den nächsten Lastschritt mittels einer Parabel bestimmt.

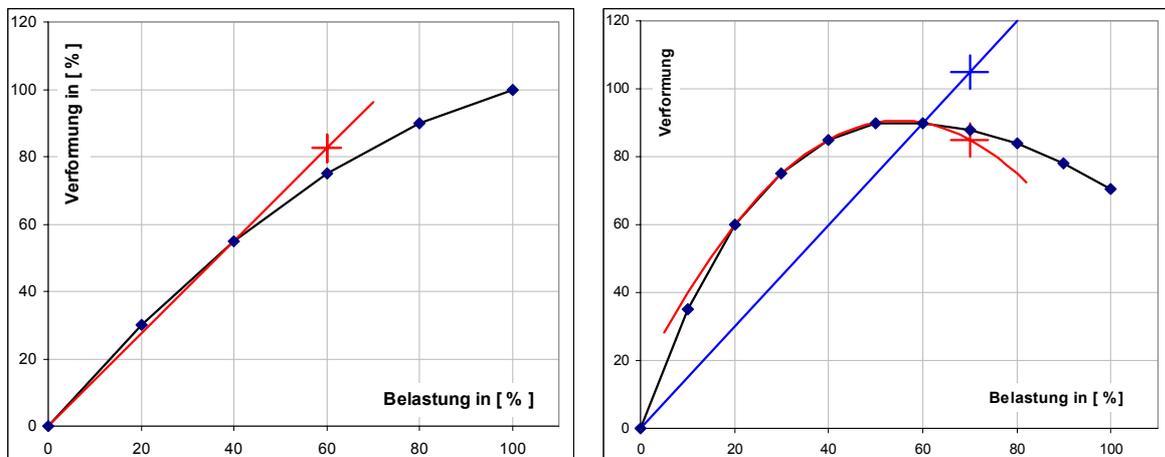


Bild 4.29 Extrapolation mit Sekante (links) und mit Parabel 2. Ordnung (rechts)

Durch die Benutzung von Übertragungsverfahren und Weggrößenverfahren werden sowohl die Stabanfangswerte als auch die Werte für die Knotenverformungen mittels Extrapolation für den nächsten Lastschritt als Näherung bestimmt.

Die Extrapolation mittels Parabel funktioniert im Allgemeinen sehr gut, dennoch gibt es Konstellationen vor allem im plastischen Bereich, in denen durch diese Vorgehensweise die Startwerte verschlechtert werden (Bild 4.30 und 4.31). Die schwarze, gerechnete Linie (Markierung mit x) zeigt in einigen Bereichen einen sehr wechselnden Verlauf, der sich durch die vorgegebene Abbruchgenauigkeit während der Iteration ergibt. Die graue Linie

stellt den exakten Normalkraftverlauf dar. Wie im vergrößerten Ausschnitt in Bild 4.31 zu sehen ist, ergibt die Extrapolation durch die letzten drei gerechneten Werte mittels Parabel einen sehr schlechten Startwert für die folgende Laststufe. Da die Steifigkeiten vor allem im plastischen Bereich jedoch stark von der Normalkraft abhängen, kann der extrapolierte Zustand bereits außerhalb des Konvergenzradius liegen. Im gezeigten Fall würde eine Extrapolation mittels Ursprungssekante einen besseren Startwert liefern.

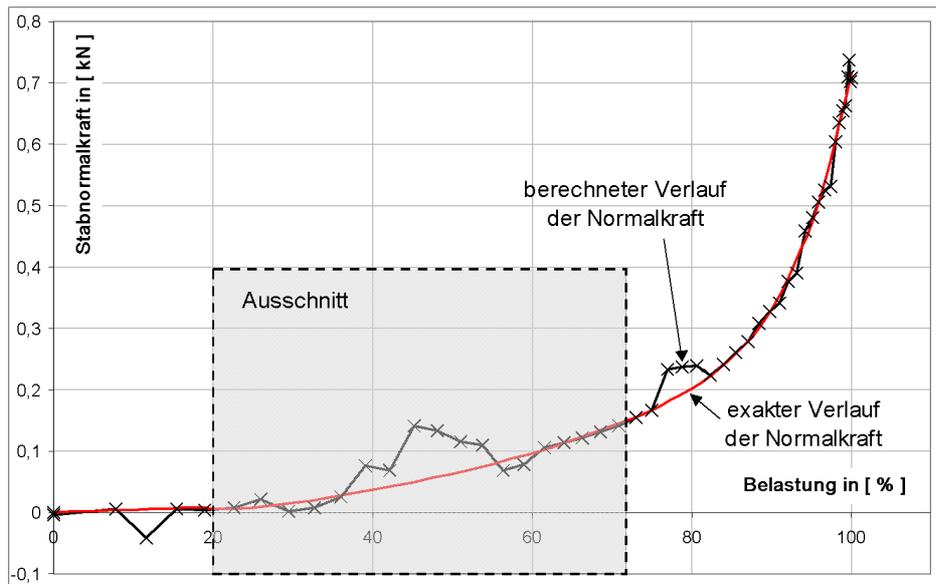


Bild 4.30 Verlauf der Normalkraft eines Stabes in Abhängigkeit von der Belastung

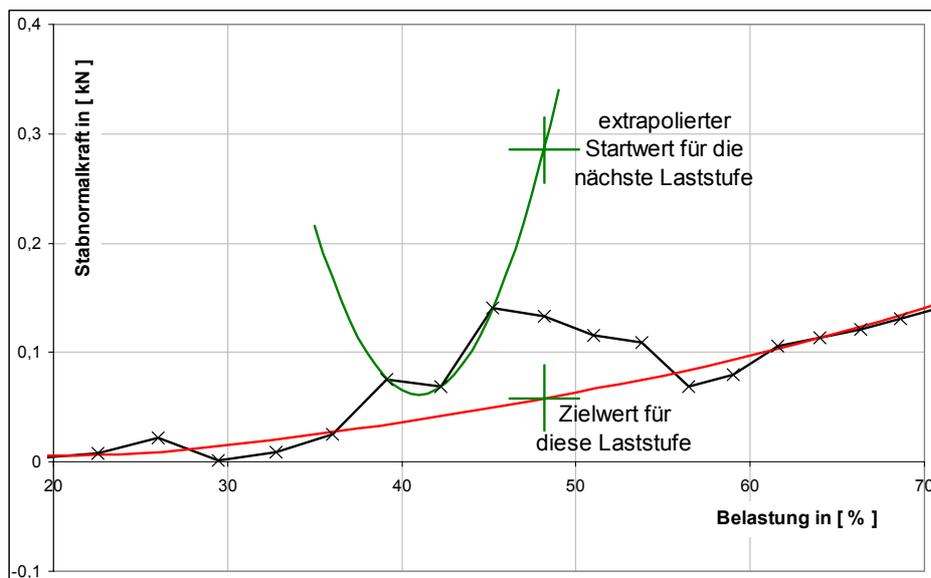


Bild 4.31 Verlauf der Normalkraft eines Stabes in Abhängigkeit der Belastung (Ausschnitt aus Bild 4.30), resultierende Probleme bei Anwendung einer quadratischen Extrapolation

4.4.3 Iterationsprobleme und Lösungsansätze

Für eine gute Konvergenz im Iterationsprozess ist es bei dem vorgestellten Rechenverfahren sehr wichtig, dass die Schnittgrößen N_x / M_y immer unterhalb der Querschnittstragfähigkeit bleiben, so dass eine korrekte Berechnung der Biege- und Dehnsteifigkeit möglich ist. Andernfalls wird mit einer Näherung für diese Werte gearbeitet, die den Konvergenzprozess jedoch erschwert.

Anhand des in Bild 4.32 gezeigten, gelenkig gelagerten Einfeldträgers sollen die Probleme bei der Iteration beschrieben und Lösungsansätze aufgezeigt werden. Vor allem die genannte, jeweils aktuelle Berechnung der Biegesteifigkeiten sowie die Längsdehnung und die Berücksichtigung großer Verformungen können die Iteration erheblich erschweren. Zur Erläuterung sind deshalb in Bild 4.33 die Last-Verformungs-Kurve für die horizontale Auflagerverschiebung dargestellt sowie die M-k-Linie des Querschnitts bei einer Normalkraft von $N_x = 0$ kN. Durch die Linienlast von $f = 11,3$ kN/m wird das System bis knapp unterhalb seiner maximalen Tragfähigkeit beansprucht ($M_{\text{Feld}} = 35,31$ kNm).

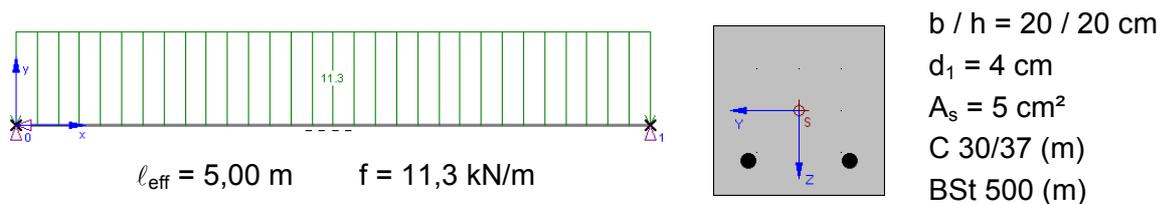


Bild 4.32 Systemabmessungen und Querschnitt

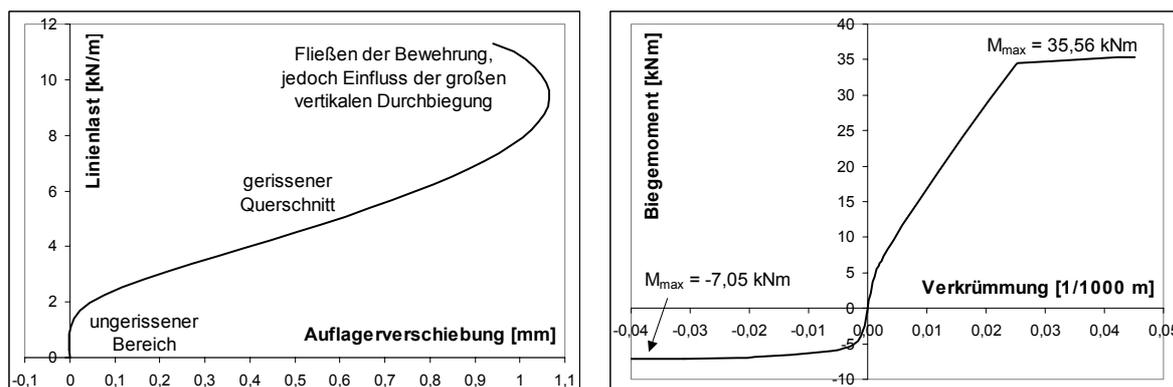


Bild 4.33 Last-Weg-Diagramm (links), M-k-Linie des Querschnitts für $N_x = 0$ kN (rechts)

Während der ersten, linear-elastischen Rechnung des Systems wird der Stab im Vollspannungszustand mit dem Übertragungsverfahren berechnet, so dass sich die Biegemomente wie folgt ergeben:

$$M_{\text{Feld}} = \frac{q \cdot \ell^2}{24} \quad M_{\text{Stütze}} = \frac{q \cdot \ell^2}{12} \quad (4.52)$$

Als bisherige Näherungslösung des Gesamtsystems mit Hilfe des Weggrößenverfahrens bewegen sich die Stabendpunkte infolge der Berücksichtigung großer Verformungen geringfügig aufeinander zu, die Auflagerpunkte verdrehen sich leicht.

Die nächste Iteration des Übertragungsverfahrens wird jetzt mit nichtlinearem Materialverhalten durchgeführt, jedoch noch mit den Startwerten der vorherigen Rechnung, so dass im ersten Schritt für $M_y = M_{\text{Stütze}}$ und $N_x \approx 0$ kN der Dehnungszustand ermittelt werden muss. Durch die beschränkte Tragfähigkeit des Querschnitts für negative Biegemomente darf dieser Wert maximal $M_y = -7,05$ kNm sein, so dass sich die Größe des ersten Lastschritts zu maximal $\sim 30\%$ ergibt. Zusätzlich erschwerend wirkt sich hier aus, dass die M-k-Linie für Verkrümmungen $k < -0,035$ 1/km einen fallenden Bereich mit negativen Tangentensteifigkeiten besitzt.

Im Fall der Verwendung einer vorab berechneten und mittels Polygonzug angenäherten M-k-Linie wäre diese Begrenzung nicht maßgebend, da der letzte (steigende) Bereich einfach extrapoliert und eine entsprechend große Verkrümmung ermittelt wird.

Auch bei der weiteren Rechnung ist eine Unterteilung mit noch mindestens einem weiteren Zwischenschritt notwendig. Zwar werden die Näherungswerte für den folgenden Lastschritt durch Extrapolation bereits relativ gut angenähert, jedoch würden sich auch hier wieder Schnittgrößen oberhalb der Tragfähigkeit ergeben, wenn der Lastschritt zu groß ist. Eine Steigerung von 30% auf 60% oder 70% wäre jedoch möglich.

Bei der weiteren Steigerung in einem Schritt auf 100% ergeben sich Schwierigkeiten durch die Berücksichtigung der Längsdehnung sowie der großen Verformungen. Durch die Extrapolation der Startwerte für den nächsten Lastschritt wird bei der Auflagerverschiebung ein extrem schlechter, im Vergleich zur richtigen Lösung nahezu doppelt so großer Näherungswert bestimmt (Bild 4.34). Eine Erfüllung dieser Randbedingungen kann in der folgenden Rechnung mit dem Übertragungsverfahren im Volleinspannzustand nicht mehr erreicht werden, so dass die Rechnung abgebrochen werden muss.

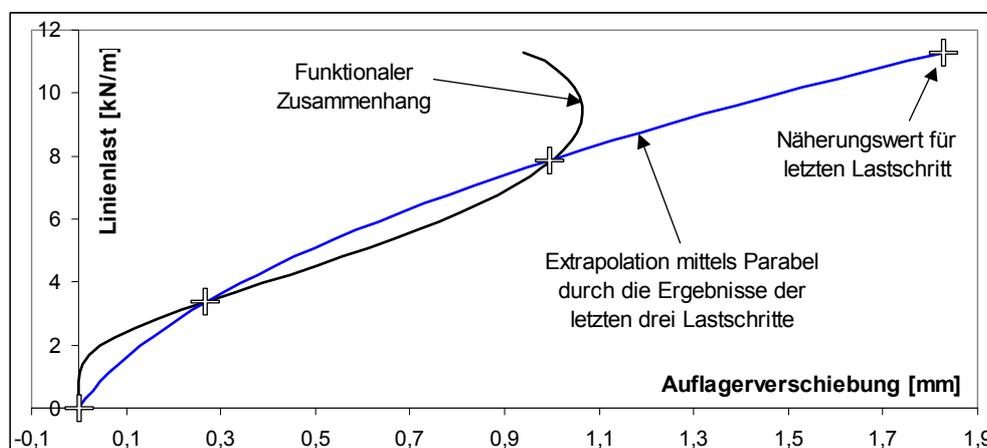


Bild 4.34 Last-Verformungs-Kurve sowie Extrapolation für den letzten Lastschritt

Das Aufbringen der Belastung in mehreren Lastschritten stellt damit eine erste Möglichkeit dar, die Konvergenz zu verbessern oder, wie im gezeigten Beispiel, überhaupt erst zu ermöglichen.

Eine weiterer Ansatz zur Verbesserung des Lösungsverhaltens ist die Dämpfung der Schrittweite vor allem in Bereichen, in denen sich die Gradienten stark verändern. Exemplarisch wird dies im folgenden ebenfalls an der Auflagerverschiebung des Einfeldträgers aus Bild 4.32 erläutert.

Ist während einer Iteration die Lösung zur Laststufe bekannt, so wird mittels der K-Matrix ein Gradient gebildet, der die Änderung der Auflagerverschiebung (eigentlich Änderung der Knotenverschiebung in x-Richtung) in Abhängigkeit der äußeren Belastung beschreibt. Durch die Formulierung als Tangente wird mit diesem Gradienten der funktionale Zusammenhang in einem relativ großen Bereich sehr gut angenähert. Befindet sich die gesuchte Lösung jedoch sehr weit außerhalb dieser guten Näherung des Gradienten, dann ist eine Konvergenz evtl. nicht mehr möglich. Durch Dämpfung der Schrittweite kann jedoch eine bessere Näherungslösung erreicht werden (Bild 4.35).

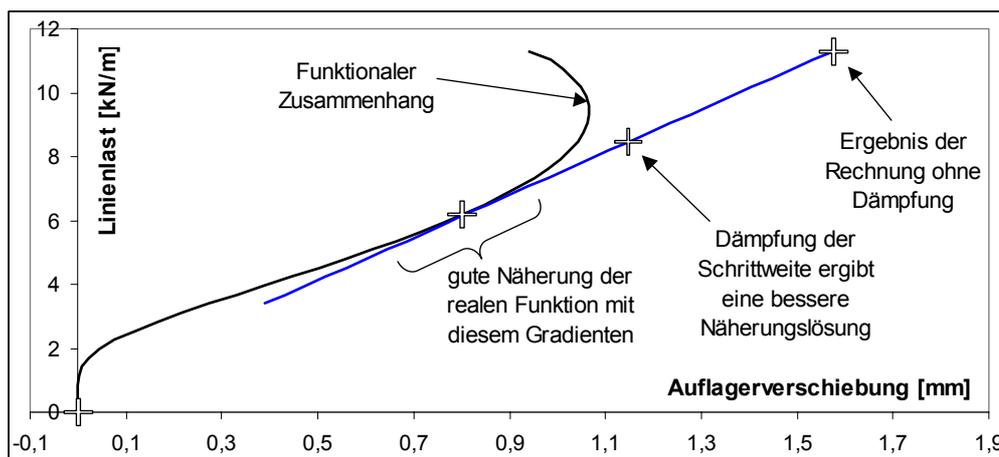


Bild 4.35 Last-Verformungs-Kurve, Rechnung mit und ohne Dämpfung

Es ist jedoch relativ schwierig, den optimalen Wert und auch den Zeitpunkt der Dämpfung zu finden. So sollte es zur Minimierung der Rechenzeit vermieden werden, sehr gute Verbesserungen der Lösung unnötig zu dämpfen, andererseits soll die Dämpfung nicht erst dann durchgeführt werden, wenn die Näherungslösung schon sehr weit von der richtigen Lösung entfernt ist.

Bei der Wahl der Dämpfung bietet es sich an, den Vektor der nicht im Gleichgewicht stehenden Kräfte zu betrachten. Werden Einzelwerte von einem Iterationsschritt zum nächsten plötzlich größer, dann könnte das ein Hinweis auf Schnittgrößenumlagerungen im System sein, bei denen eine Dämpfung sinnvoll ist. Beim Auftreten von Werten im Kräftevektor in aufeinanderfolgenden Iterationen, die einen ähnlichen Betrag, aber ein

entgegengesetztes Vorzeichen aufweisen, kann die Näherungslösung um die richtige Lösung springen. Eine Dämpfung des Lösungsvektors auf ca. 50% könnte in diesem Fall ein besseres Ergebnis liefern.

Einige Dämpfungsalgorithmen betrachten die Güte der neuen Näherungslösung und versuchen gegebenenfalls eine kleinere oder eine größere Dämpfung. Da die Berechnung der „Güte der Verbesserung“ jedoch eine Berechnung aller Balken mit dem Übertragungsverfahren bedeuten würde, scheidet diese Möglichkeit aus zeitlichen Gründen beim vorliegenden Verfahren aus. Damit verbleibt nur die beschriebene und relativ einfache Möglichkeit, anhand des Verhaltens des Kräftevektors und des Lösungsvektors zu beurteilen, ob und in welchem Umfang eine Dämpfung durchgeführt werden soll.

Auch wenn die hier vorgestellten Strategien zur Verbesserung der Konvergenz für einige nichtlineare Systeme zwingend erforderlich sind, so bleibt festzustellen, dass das Rechenverfahren an sich bereits sehr robust und stabil ist. Nahezu alle Versuche aus Kapitel 5 können mit maximal zwei Lastschritten berechnet werden, die meisten sogar in einem Lastschritt.

Auch das in Kapitel 4.3.2 genutzte Beispiel eines beidseitig eingespannten Einfeldträgers zur Erläuterung der Probleme, die sich beim Aufstellen der Steifigkeitsmatrix ergeben, kann in einem einzigen Lastschritt mit nur 10 Iterationen gerechnet werden. Während der ersten Rechnung (linear-elastisch, konstante Steifigkeiten) bewegen sich die Stabendpunkte infolge der Berücksichtigung großer Verformungen (Theorie 3. Ordnung) geringfügig aufeinander zu. Wenn im folgenden zweiten Schritt das nichtlineare Materialverhalten berücksichtigt wird, dann baut sich jedoch durch die behinderte Achsendehnung im Volleinspannzustand eine sehr hohe Drucknormalkraft auf. Für den Abbau dieser Normalkraft werden im folgenden mehrere Iterationsschritte benötigt (Tabelle 4.9). Durch die sich plötzlich stark vergrößernde Normalkraft wird jedoch die Dämpfung des Lösungsvektors aktiviert, die den Iterationsprozess in diesem Fall leider verlangsamt.

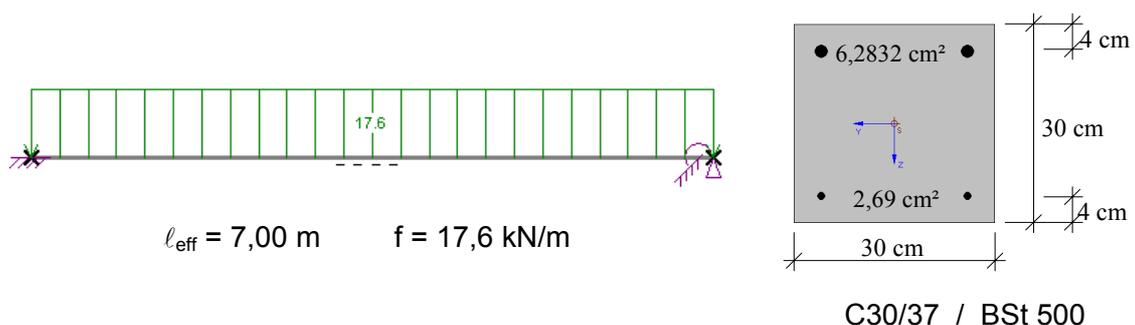


Bild 4.36 System mit Belastung aus Kapitel 4.3.2

Tabelle 4.9 Iterationsverlauf für das Beispiel in Bild 4.36, Schnittgrößen bzw. Beanspruchungen an der Einspannung am Stabanfang

Iteration	N_x in [kN]	Q_z in [kN]	M_y in [kNm]	Bemerkungen
1.	3,002	61,600	-71,864	linear-elastische Rechnung
2.	-196,502	61,5988	-69,360	Dämpfung mit 0,00531
3.	-195,467	61,5988	-69,379	Dämpfung mit 0,1826
4.	-163,263	61,5988	-70,092	Dämpfung mit 0,4912
5.	-98,589	61,5988	-72,340	Dämpfung mit 0,6574
6.	-43,523	61,5988	-74,901	
7.	-7,671	61,5988	-76,554	
8.	-1,031	61,5988	-76,645	
9.	-0,025	61,5988	-76,646	
10.	-0,000179	61,5988	-76,6456	Endergebnis

Die leichte Unsymmetrie der Querkraft ($Q = 61,5988$ kN statt 61,60 kN) ergibt sich durch die in Kapitel 4.2.3 beschriebene Näherung bei der Biegesteifigkeit.

Im zweiten Iterationsschritt während des Übertragungsverfahrens überschreiten die aktuellen Schnittgrößen die Querschnittstragfähigkeit. Dennoch ergibt sich mit den „künstlich“ bestimmten Steifigkeitswerten eine konvergente Lösung.

Ein vom Benutzer zu erbringender Anteil zur Verbesserung der Konvergenz ist die Modellierung des Tragwerks mit möglichst langen Stäben. Das heißt, dass nur dort ein Knoten erstellt wird, wo auch ein Querschnittswechsel stattfindet. Dadurch wird erreicht, dass einerseits die Größe der globalen Steifigkeitsmatrix reduziert wird und damit auch der Aufwand zu ihrer Lösung. Andererseits wirkt sich die integrale Betrachtung eines gesamten Stabes im Übertragungsverfahren positiv auf das Konvergenzverhalten aus. Wird in einem Stababschnitt die Fließgrenze der Bewehrung überschritten, so können sich die Kräfte bereits lokal umlagern. Weiterhin wird die Steifigkeit des gesamten Stabes nicht in dem gleichen Maße reduziert, wie die eines Stabes, bei dem sich die Bewehrung komplett im Fließen befindet. Dadurch wiederum ergeben sich Vorteile für die Stabilität und das Lösungsverhalten der gesamten Steifigkeitsmatrix.

Zusammenfassend betrachtet, lassen sich Systeme bei Beanspruchungen im Gebrauchszustand bis kurz unterhalb der Fließgrenze der Bewehrung im Normalfall in einem einzigen Lastschritt und ohne Dämpfung berechnen. Erst wenn die Bewehrung die Fließgrenze überschreitet und sich stark reduzierte Steifigkeiten ergeben, sind in einigen Fällen mehrere Lastschritte sowie eine Dämpfung erforderlich.

4.4.4 Konvergenzkriterien

Beim Übertragungsverfahren wird der Stab im Volleinspannzustand berechnet, so dass die Verformungsbedingungen am Stabanfang w_x , w_z und φ immer gleich Null sind. Die zu Beginn der Rechnung unbekanntes Schnittgrößen N_x , Q_z und M_y am Stabanfang müssen derart bestimmt werden, dass der Stab am Ende ebenfalls die Randbedingungen mit $w_x = w_z = \varphi = 0$ erfüllt. Bei nahezu sich linear verhaltenden Systemen ergibt bereits die erste Verbesserung der Startwerte N_x , Q_z und M_y sehr gute Näherungen. Die nächste Verbesserung der Startwerte wird deshalb entsprechend klein ausfallen, so dass in derartigen Fällen die Größe bzw. die Länge des Vektors der Verbesserungen als Abbruchkriterium benutzt werden kann. Verändert sich die Lösung nur noch geringfügig, dann muss diese Lösung eine gute Näherung darstellen.

Für den Fall, dass die Gradienten der Jakobimatrix jedoch nicht mit ausreichender Genauigkeit bestimmt werden konnten, kann es passieren, dass sich die Lösung zwar auch um jeweils kleine Beträge ändert, diese Werte jedoch für mehrere Iterationen auf gleichem, relativ kleinem Niveau bleiben. In diesem Fall ist es sinnvoller, die Zielvorgaben, hier also die Verformungsgrößen am Stabende zu überprüfen und als Konvergenzkriterium heranzuziehen. Mit dieser Vorgehensweise wird bei normalen Systemen evtl. die eine oder andere Iteration zu viel ausgeführt, im allgemeinen ergibt sich jedoch ein sehr verlässliches Abbruchkriterium.

Bei der Rechnung des Gesamtsystems mit dem Weggrößenverfahren können sowohl die Veränderungen der Lösung (Verschiebungsgrößen der Knoten) oder die nicht im Gleichgewicht stehenden Knotenkräfte bzw. Momente als Abbruchkriterium herangezogen werden. Auch hier kann es bei labilen Systemen passieren, dass die nicht ausbalancierten Kräfte zwar nur noch kleine Beträge aufweisen, die Verformungen sich jedoch noch stark ändern. Für das Programm Stab2D-NL wurde die Entscheidung zugunsten der nicht im Gleichgewicht stehenden Kräfte getroffen.

Hinzuweisen sei noch darauf, dass es sinnvoll ist, für die Rechnung des Gesamtsystems zwei verschiedene Abbruchgrenzen zu definieren. Ein erster, etwas größerer Wert definiert die Abbruchgenauigkeit für die Lastschritte 1 bis n-1. Die Ergebnisse dieser Laststufen sind für den Benutzer meist nicht weiter relevant, so dass eine geringere Genauigkeit akzeptiert werden kann. Erst für die letzte Laststufe mit den Endergebnissen sollte eine kleinere Abbruchgenauigkeit vorgegeben werden.

4.4.5 Wahl der Rechenparameter

Eine derartige Berechnung besitzt eine Vielzahl an Eingangsparametern. Zu nennen sind hier Abbruchschranken für erreichte Konvergenz, anfängliche Stabteilung, Verfeinerung der Stababschnitte bei Steifigkeitsänderung oder die Art der Lastaufbringung in mehreren Lastschritten.

Diese Parameter können teilweise erheblich den Erfolg und den Zeitaufwand für eine konvergente Berechnung steuern. Ein optimales Zusammenspiel aller Werte lässt sich leider nicht angeben, da diese je nach untersuchtem statischen System unterschiedlich sind. Die Erfahrung des Anwenders wird hier auch in Zukunft ausschlaggebend sein.

4.4.6 Verteilung der Rechenzeit, Optimierungsmöglichkeiten

Der Rechenkern gliedert sich, wie in den vorherigen Kapiteln beschrieben, in drei Bereiche.

1. **Weggrößenverfahren**, Aufstellen und Lösen der Globalen Steifigkeitsmatrix
2. **Übertragungsverfahren** zur Berechnung eines Stabes im Einspannzustand, Ermittlung des Kräftevektors und Aufstellen der lokalen Steifigkeitsmatrix
3. **Querschnittsberechnung** zur Ermittlung der aktuellen Steifigkeitswerte für die Verformungsrechnung

Durch die Modellierung eines Tragwerks mit möglichst langen einzelnen Stäben resultiert für Punkt 1 ein sehr kleines Gleichungssystem mit nur wenigen Freiheitsgraden. Infolgedessen benötigt dieser Punkt nur ca. 5% der gesamten Rechenzeit, so dass eine Optimierung des benutzten Gauß-Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems bzw. dessen Ersetzen durch ein schnelleres Lösungsverfahren nur eine sehr geringe Zeitersparnis mit sich bringt.

Die Berechnung eines Stabes mit dem Übertragungsverfahren bei gegebenen Steifigkeitswerten und die zugehörige Iteration zur Ermittlung der korrekten Stabanfangswerte beansprucht ca. 10 bis 20% der Rechenzeit. Der Rest wird für die Querschnittsberechnung mit Bestimmung der Steifigkeiten benötigt. Ein nutzbares Potential wird bei der optimalen Ermittlung der Stabteilung liegen. In den im Programm Stab2D-NL umgesetzten Algorithmen wird die Teilung der Einfachheit halber meist zu fein gewählt und dadurch wertvolle Rechenzeit verschenkt.

Die beschriebene Zeiteinteilung stellt nur eine grobe Schätzung dar. Die genaue Aufteilung hängt vor allem davon ab, ob sich die Stahlbetonquerschnitte des Tragwerks im ungerissenen, gerissenen oder plastischen Bereich befinden und wie komplex die Querschnitte modelliert sind.

4.4.7 Erweiterung auf den 3D-Fall

In der vorliegenden Arbeit wurden Algorithmen zur nichtlinearen Berechnung von ebenen Rahmentragwerken aus Stahl- und Spannbeton entwickelt und im Programm Stab2D-NL implementiert. Eine Erweiterung auf den 3D-Fall ist ebenso möglich. Dazu muss die Dehnungsberechnung für zweiachsige Biegung mit Normalkraft erfolgen, wie es von QUAST und BUSJAEGER [4] ausführlich beschrieben wurde. Das Übertragungsverfahren ist um die Zustandsgrößen für den 3D-Fall zu erweitern (Querkraft Q_y , Biegemoment M_z , Torsionsmoment M_T sowie zugehörige Weggrößen). Beim Weggrößenverfahren sind die zusätzlichen Freiheitsgrade einzuführen.

Problematisch wird die Annahme für die Torsionssteifigkeit von Stahlbetonquerschnitten sein. Zwar existieren eine Vielzahl von Ansätzen zur genauen oder näherungsweise Ermittlung dieses Wertes, die Berechnung eines größeren Tragwerks ist jedoch von der schnellen und nur mit geringem Aufwand verbundenen Ermittlung der Steifigkeiten abhängig. OŽBOLT et al [5] benutzen in ihrem Programm NELIN 3 zur nichtlinearen Berechnung von 3D-Rahmenstrukturen aus Stahlbeton, das auf der Finiten Elemente Methode beruht, den linear-elastischen Wert der Torsionssteifigkeit, der in der Rechnung pauschal auf 10% abgemindert wird.

Zusammenfassend ergeben sich, abgesehen von der zunehmenden Komplexität des Programms und der daraus resultierenden Fehleranfälligkeit beim Programmieren, keine gravierenden Schwierigkeiten bei der Umsetzung für den 3D-Fall.

4.5 Literaturverweise

- [1] *Schneider, K.-J.*: Bautabellen für Ingenieure, 12. Auflage 1996, Werner-Verlag Düsseldorf, S. 4.28 - 4.29.
- [2] *Griebenow, G.*: Richtlinie für das Aufstellen und Prüfen EDV-unterstützter Stand sicherheitsnachweise. Der Prüfenieur, Heft 19, Oktober 2001, S. 50-56.
- [3] ABASt (**A**n**S**chauliche **B**alken**S**tatik), Programm zur nichtlinearen Berechnung von Balkentragwerken, Arbeitsbereich Massivbau, TU Hamburg-Harburg, 1999.
- [4] *Busjaeger, D., Quast, U.*: Programmgesteuerte Berechnung beliebiger Massivbauquerschnitte unter zweiachsiger Biegung mit Längskraft. DAfStb, Heft 415.
- [5] *Ožbolt, J., Mayer, U., Moschner, T., Lieb, H.*: Nichtlineare Berechnung von dreidimensionalen Stab- und Seiltragwerken - Theorie und Anwendung. Springer-VDI-Verlag, November 2003, Download unter www.technikwissen.de/library/pdf/Nichtlineare_3D_Berechnung_Theorie_und_Anwendung_01.pdf.

