

## 7 Zusammenfassung

Die wirklichkeitsnahe Berechnung der Verformungen und der Schnittgrößenverteilung von Stahlbetontragwerken ist nur unter Berücksichtigung des nichtlinearen Materialverhaltens möglich. Durch das Aufreißen werden bereits im Gebrauchszustand die Biege- und Dehnsteifigkeit reduziert, so dass sich gegenüber einer linear-elastischen Rechnung vergrößerte Verformungen und bei behinderten Verformungen verminderte Zwangsbeanspruchungen ergeben.

Bisher veröffentlichte Rechenverfahren berücksichtigen vorzugsweise den nichtlinearen Zusammenhang zwischen Moment und Verkrümmung und vernachlässigen häufig die Achsendehnung bei Stahlbetontragwerken, die durch das Aufreißen des Querschnitts bereits bei reiner Biegebeanspruchung auftritt. Dieser Effekt ist maßgeblich daran beteiligt, dass Zwangsbeanspruchungen in dehnbehindert ausgebildeten Systemen bei Belastungen im Gebrauchszustand verringert und für den Grenzzustand der Tragfähigkeit meist völlig abgebaut werden.

Mit dem Ziel, insbesondere die Auswirkungen der Achsendehnung rechnerisch erfassen zu können, wurden Algorithmen zum nichtlinearen Berechnen von ebenen Rahmensystemen aus Stahl- und Spannbeton entwickelt. Dafür werden die jeweiligen Vorteile von Übertragungsverfahren, FE-Methode und Querschnittsberechnung genutzt, um eine schnelle und für baupraktische Belange ausreichend genaue Rechnung von Stahlbetontragwerken zu ermöglichen. Die Rechnung erfolgt nach Theorie 3. Ordnung und berücksichtigt das nichtlineare Verhalten im Hinblick auf Verkrümmung und Achsendehnung sowie näherungsweise die Schubverformung.

In den Kapiteln 3 und 4 werden die Rechenalgorithmen erläutert, wobei insbesondere auf die Unterschiede bzw. Verbesserungen im Vergleich mit bisher entwickelten Verfahren eingegangen wird. Mögliche Probleme bei einer nichtlinearen Rechnung und Strategien zu deren Lösung werden diskutiert. Jedoch zeigt das vorgestellte Verfahren eine gute Stabilität im Iterationsprozess, so dass für viele Tragwerke die Lastaufbringung bis zum Fließen der Bewehrung noch in einem einzigen Lastschritt erfolgen kann.

Zur Überprüfung der entwickelten Rechenalgorithmen wurden im Anschluss daran Nachrechnungen von fünf Experimenten mit dem Programm Stab2D-NL vorgestellt, die eine große Bandbreite in Bezug auf verwendete Strukturen, Baustoffe und Beanspruchungen aufweisen sowie teilweise unterschiedliche Versagensformen zeigen. Bei Kenntnis der Spannungs-Dehnungs-Linien der Baustoffe kann in den meisten Fällen eine sehr gute

Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen erreicht werden, sowohl im Hinblick auf die Maximallasten als auch im Hinblick auf die Last-Verformungs-Kurven. Durch Vereinfachungen bedingte Abweichungen der rechnerischen Ergebnisse wurden diskutiert.

Mit den entwickelten Programmen INCA2 und Stab2D-NL wurden Parameterstudien zur Achsendehnung von Stahl- und Spannbetonbalken durchgeführt und die Einflüsse aus dem Bewehrungsgehalt, aus Schwinden und Kriechen des Betons und anderen Aspekten untersucht. Im weiteren wurden Zwangsbeanspruchungen bei dehnbehindert gelagerten und schlaff bewehrten Balkensystemen ermittelt. Aufgrund der Achsendehnung infolge Biegebeanspruchung wird die Zwangsnormalkraft für die untersuchten Systeme soweit abgebaut, dass die Gebrauchstauglichkeit in Bezug auf die Größe der auftretenden Spannungen in der Bewehrung ab einem gewissen Bewehrungsverhältnis erfüllt ist. Konstruktive Maßnahmen bei der Anordnung der Bewehrung sind jedoch zu beachten.

Exemplarisch an einer Halle in Fertigteilmbauweise wurde das Tragverhalten gekoppelter Stützen untersucht. Im Vergleich zu einer bisher üblichen Rechnung, bei der die Kopplung im Grenzzustand der Stützentragsfähigkeit vernachlässigt wird, können sich bei einer nichtlinearen Rechnung des Gesamtsystems erhebliche Reserven in der Tragfähigkeit ergeben. Eine wirtschaftlichere Bemessung mit verkleinerten Stützenabmessungen und Bewehrungsgehalten ist durch eine optimale Umlagerung der Kräfte im System häufig möglich. Bedingt durch die Ausnutzung aller rechnerischen Tragreserven bei einer nichtlinearen Rechnung sollten dann jedoch Effekte aus der Längenänderung der Dachbinder berücksichtigt werden, wie sie infolge Temperatureinwirkung oder Schwinden und Kriechen auftreten. Vor allem die Verlängerung der Dachbinder hat bei den untersuchten Systemen eine Verringerung der Stützentragsfähigkeit zur Folge.

Die entwickelten und in dem Programm Stab2D-NL umgesetzten Rechenalgorithmen stellen eine leistungsfähige Methode dar, um nichtlineare und damit realitätsnahe Berechnungen von ebenen Rahmentragwerken aus Stahl- und Spannbeton durchzuführen. Eine Erweiterung auf den 3D-Fall ist relativ leicht durchführbar. Damit ergibt sich für den Tragwerksplaner die Möglichkeit, mit geringem Aufwand Verformungen, Schnittgrößen und insbesondere auch Zwangsbeanspruchungen in guter Näherung berechnen zu können.

## 8 Verweise

### 8.1 Vorschriften

**DIN 1045-neu**, Teil 1: Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton, Bemessung und Konstruktion, Entwurf August 2001

**Eurocode 2**, Design of concrete structures, Part 1: General rules and rules for buildings, Ausgabe Oktober 2001

**ÖNorm B 4700**, Stahlbetontragwerke, EUROCODE-nahe Berechnung, Bemessung und konstruktive Durchbildung, Ausgabe 2001-06-01

### 8.2 Benutzte und weiterführende Literatur

**Ahrens, H., Duddeck, H.:** Berechnung von Stabtragwerken, Betonkalender 1988, Teil 1, S. 295 – 429.

**Allgöwer, G.:** Bemessung von Stahlbetondruckgliedern unter zweiachsiger Biegung mit Interaktionsdiagrammen nach Theorie II. Ordnung. Dissertation, Brandenburgische Technische Universität Cottbus, 2001

**Bachmann, H., Thürlimann, B.:** Versuche über das plastische Verhalten von zweifeldrigen Stahlbetonbalken, Serie A. Eidgenössisch Technische Hochschule Zürich, Institut für Baustatik, Bericht Nr. 6203-1, 1965.

**Bathe, K.-J.:** Finite-Elemente-Methoden, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Paris Tokyo Hong Kong 1990.

**Bausch, S.:** Experimentelle und rechnerische Untersuchungen zur Grenzverformungsfähigkeit von Stahlbetonbalken. Technische Universität Braunschweig, Institut für Statik, Bericht-Nr. 84-42, 1984.

**Bićanić, N., de Borst, R., Mang, H. und Meschke, G. (Ed.):** Computational Modelling of Concrete Structures. Proc. of the EURO-C Conference 2003, St. Johann im Pongau, 17-20 March 2003. Lisse, Abingdon, Exton (PA), Tokyo: A. A., Balkema Publishers, 2003.

**Busjaeger, D., Quast, U.:** Programmgesteuerte Berechnung beliebiger Massivbauquerschnitte unter zweiachsiger Biegung mit Längskraft. DAfStb, Heft 415

**Claeson, C., Gylltoft, K.:** Slender High-Strength Concrete Columns Subjected to Eccentric Loading. Journal of Structural Engineering / March 1998, S. 233-240.

**Eibl, J., Retzepis, I.:** Nichtlineare Berechnung der Schnittkraftumlagerungen und Zwangsbeanspruchungen in Stahlbetontragwerken. Beton- und Stahlbetonbau 90, 1995, S. 33-37.

**Espion, B.:** Contribution à l'analyse non linéaire des ossatures plane. Thèse de Doctorat. Université Libre de Bruxelles, 1985.

**Falk, S.:** Das Reduktionsverfahren der Baustatik unter besonderer Berücksichtigung der Programmierbarkeit für digitale Rechenautomaten. Habilitationsschrift, Braunschweig 1965

**Göttsche, J.J.:** Effektive Steifigkeiten stabförmiger Stahlbetontragwerke bei allgemeiner räumlicher Beanspruchung. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 1988.

**Graubner, C.-A.:** Schnittgrößenverteilung in statisch unbestimmten Stahlbetonbalken unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Stoffgesetze. Dissertation an der Technischen Universität München, 1988.

**Griebenow, G.:** Richtlinie für das Aufstellen und Prüfen EDV-unterstützter Standsicherheitsnachweise. Der Prüfenieur, Heft 19, Oktober 2001, S. 50-56.

**Grzeschkowitz, R.:** Zum Trag- und Verformungsverhalten schlanker Stahlbetonstützen unter besonderer Berücksichtigung der schiefen Biegung. Dissertation an der Technischen Universität Braunschweig, 1988.

**Heft 425** des DAfStb, Beuth Verlag GmbH Berlin Wien Zürich, Berlin 1992.

**Heft 525** des DAfStb, Beuth Verlag GmbH Berlin Wien Zürich, Berlin 2003.

**Keysberg, J.:** Zur Auswirkung von Entlastungen auf den Gebrauchszustand biegebeanspruchter Stahlbetontragwerke. Dissertation, TU-Hamburg-Harburg, 1999.

**Kreller, H.:** Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonstabtragwerken unter Last- und Zwangseinwirkung. Dissertation an der Universität Stuttgart, 1989.

**Kuhlmann, U. und Ehmann, J.:** Versuche zur Ermittlung der Querkrafttragfähigkeit von Verbundplatten unter Längszug ohne Schubbewehrung, Versuchsbericht Nr. 2001-6X. Institut für Konstruktion und Entwurf, Stahl-, Holz- und Verbundbau, Universität Stuttgart, Februar 2001.

**Liebrecht, K.:** Zur Größe wirtschaftlich sinnvoller Schnittgrößenumlagerungen in Durchlaufträgern aus Stahlbeton. Dissertation, TU Hamburg-Harburg, 1998.

**Litzner, H.-U.:** Nichtlineare Behandlung von ebenen Stabtragwerken aus Stahlbeton nach dem Weggrößenverfahren. Dissertation, RWTH Aachen, 1979.

**Mickleborough, Chan, Ning:** Analysis of Cracking Effects on Tall Reinforced Concrete Buildings. Journal of Structural Engineering / Sept. 2000, S. 995-1003.

**Noakowski, P.:** Praxisgerechtes Verfahren für die Bemessung von Stahlbetonbauteilen bei Zwangsbeanspruchung. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 4+5/1980.

**Noakowski, P.:** Nachweisverfahren für Verankerung, Verformung, Zwangsbeanspruchungen und Rissbreite. Kontinuierliche Theorie der Mitwirkung des Betons auf Zug. Rechenhilfen für die Praxis. DafStb, Heft 394, 1988.

**Noakowski, P., Schäfer, H. G.:** Steifigkeitsorientierte Statik im Stahlbetonbau, Stahlbetontragwerke einfach richtig berechnen. Ernst & Sohn, 2003.

**Olsen, P. C.:** Das Übertragungs- und das Weggrößenverfahren für ebene Stahlbetontragwerke unter Verwendung von Tangentensteifigkeiten. Heft 373 des DAfStb, Ernst und Sohn, Berlin 1986.

**Ožbolt, J., Mayer, U.:** Nichtlineare Berechnung von Stabtragwerken aus Stahl- und Spannbeton unter Berücksichtigung von Zeiteinflüssen. Bauingenieur, Heft 11/1997.

**Ožbolt, J., Mayer, U., Moschner, T., Lieb, H.:** Nichtlineare Berechnung von dreidimensionalen Stab- und Seiltragwerken - Theorie und Anwendung. Springer-VDI-Verlag, November 2003, Download unter [www.technikwissen.de/library/pdf/Nichtlineare\\_3D\\_Berechnung\\_Theorie\\_und\\_Anwendung\\_01.pdf](http://www.technikwissen.de/library/pdf/Nichtlineare_3D_Berechnung_Theorie_und_Anwendung_01.pdf).

**Ozel, M., and Bank, L. C.:** Behavior of Concrete Beams Reinforced with 3-D Composite Grids. CD-ROM Paper No. 069. Proceedings of the 16<sup>th</sup> Annual Technical Conference, American Society for Composites, Virginia Tech, Va. Sept. 9-12, 2001.

**Quast, U.:** Anwendung des Reduktionsverfahrens zur Bemessung von Stahlbeton-Stabwerken nach der Theorie II. Ordnung. Beton- und Stahlbetonbau 5/1976, S. 115-118.

**Quast, U.:** Verfahrensgerechte Berücksichtigung des Kriechens bei programmgesteuerter Berechnung schlanker Stahlbetonstäbe. Bauingenieur 53, 1978, S. 41-42.

**Quast, U.:** Zur Mitwirkung des Betons in der Zugzone. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 10/1981, S. 247 – 250.

**Quast, U.:** Zum nichtlinearen Berechnen im Stahlbeton- und Spannbetonbau. Beton- und Stahlbetonbau 89, 1994, Heft 9, S. 250-253, Heft 10, S. 280-284.

**Quast, U.:** Zur Kritik an der Stützenbemessung. Beton- und Stahlbetonbau 95, 2000, Heft 5, S. 305-311.

**Quast, U.:** Vorgespannte Stützen und Maste aus hochfestem Schleuderbeton. Beton- und Stahlbetonbau 97, 2002, Heft 6, S. 312- 315.

**Quast, U.:** Elementare Stahlbetonberechnungen mit Euler, Gauß und Broyden. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 10/2002.

**Schlaich, J., Schober, H., Koch, R.:** Versuche zur Mitwirkung des Betons in der Zugzone von Stahlbetonröhren. Bericht des Instituts für Massivbau der Universität Stuttgart, August 1979.

**Schießl, P.:** Einfluss von Rissen auf die Dauerhaftigkeit von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen, DAfStb, Beitrag im Heft 370.

**Schmitt, H.:** Die unmittelbare Berücksichtigung von Gebrauchsanforderungen bei der Biegebemessung bewehrter Betonbauteile. Dissertation, TU Hamburg-Harburg, 1999.

**Schneider, K.-J.:** Bautabellen für Ingenieure, 12. Auflage 1996, Werner-Verlag Düsseldorf, S. 4.28 - 4.29.

**Tavarez, F.A., Bank, L.C., and Plesha, M.E.:** Analysis of Fiber-Reinforced Polymer Composite Grid Reinforced Concrete Beams. ACI Structural Journal / March-April 2003, S. 250 - 258.

**Vater, C.:** Rechnerisch-theoretische Untersuchungen zur Schnittgrößenumlagerung in verschieblichen und unverschieblichen Stahlbetonrahmen. Dissertation, TU Hamburg-Harburg, 1999.

**Wai-Fah Chen, Lian Duan:** Bridge Engineering Handbook, Chapter 36.5.2 Modeling and Solution Procedures. (c) 2000 by CRC Press, Boca Raton London New York Washington, D.C.

### 8.3 Programmverweise

**ABaS**, Anschauliche Balkenstatik, Autoren: Quast, U., Los, M., Cordes, J.-E., Download unter [www.mb.tu-harburg.de](http://www.mb.tu-harburg.de), 09/2000

**INCA2**, Interactive Nonlinear Cross-Section Analysis Biaxial, Autor: Pfeiffer, U., Download unter [www.mb.tu-harburg.de](http://www.mb.tu-harburg.de) oder unter [www.u-pfeiffer.de](http://www.u-pfeiffer.de) , 01/2004

**NELIN 3**, Ožbolt, J., Mayer, U., Universität Stuttgart, Institut für Werkstoffe im Bauwesen

**Stab2D-NL**, Programm zur nichtlinearen Berechnung ebener Rahmentragwerke aus Stahl- und Spannbeton, Autor: Pfeiffer, U., Download unter [www.mb.tu-harburg.de](http://www.mb.tu-harburg.de) oder unter [www.u-pfeiffer.de](http://www.u-pfeiffer.de), 01/2004

## Anhang A1 Herleitung der Übertragungsgleichungen für die Verformungen

Tabelle A1.1 Virtuelle Größen und zugehörige Moment- und Querkraftverläufe

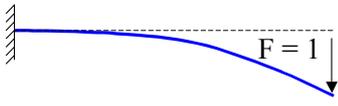
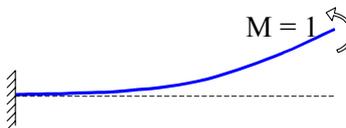
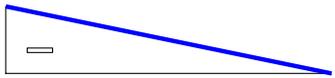
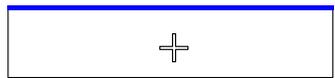
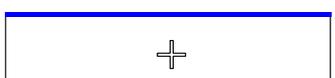
	Virtuelle Kraft $F = 1$	Virtuelles Moment $M = 1$
		
<b>M</b>	 $M = 1 \cdot L$	 $M = 1$
<b>Q</b>	 $Q = 1$	 $Q = 0$

Tabelle A1.2 Auswertung der Arbeitsintegrale für das Biegemoment und die Querkraft

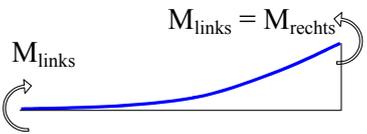
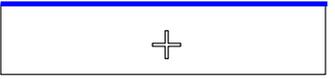
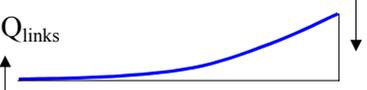
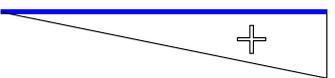
		Virtuelle Kraft $F = 1$		Virt. Moment $M = 1$		
	Verläufe für Verformung, Moment und Querkraft	Verlauf von M und Q	Koppelwert	Arbeitsintegral	Koppelwert	Arbeitsintegral
<b>Moment M</b>		$M_{\text{links}} = M_{\text{rechts}}$				
	 $M = M_L$	$M = M_L$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \cdot L^2 \cdot M_{\text{links}}$	1	$L \cdot M_{\text{links}}$
		$Q = 0$	0	0	0	0
<b>Querkraft Q</b>		$Q_{\text{links}} = Q_{\text{rechts}}$				
	 $M = Q_L \cdot L$	$M = Q_L \cdot L$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6} \cdot L^3 \cdot Q_{\text{links}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot L^2 \cdot Q_{\text{links}}$
	 $Q = Q_L$	$Q = Q_L$	1	$L \cdot Q_{\text{links}}$	0	0

Tabelle A1.3 Auswertung der Arbeitsintegrale für Linienlast f + Gradient und für die Normalkraft

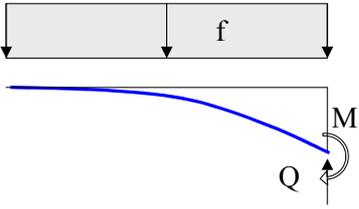
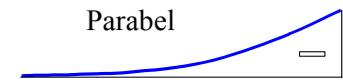
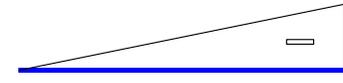
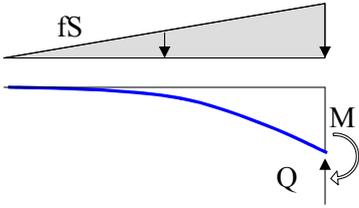
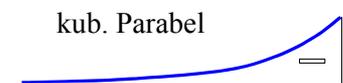
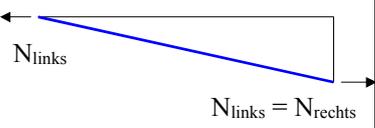
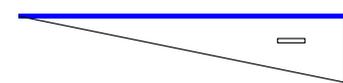
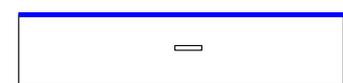
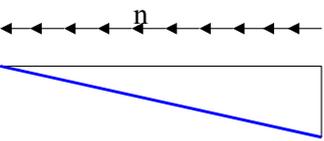
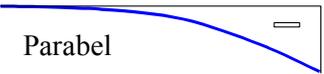
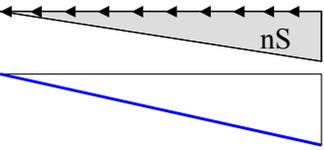
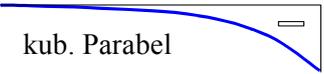
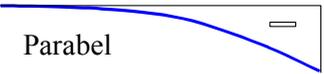
		Virtuelle Kraft F = 1		Virt. Moment M = 1		
	Verläufe für Verformung, Moment und Querkraft	Verlauf von M und Q	Koppelwert	Arbeitsintegral	Koppelwert	Arbeitsintegral
<b>Streckenlast f</b>						
	 Parabel	$M = -\frac{f \cdot L^2}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{L^4}{24} \cdot f$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{L^3}{6} f$
		$Q = -f \cdot L$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{L^2}{2} \cdot f$	0	0
<b>Linienlastgradient fS</b>						
	 kub. Parabel	$M = -\frac{fS \cdot L^3}{6}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{L^5}{120} \cdot fS$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{L^4}{24} \cdot fS$
	 Parabel	$Q = -\frac{fS \cdot L^2}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{L^3}{6} \cdot fS$	0	0
<b>Normalkraft N</b>						
	 $M = -w_r \cdot N$	$M = -w_r \cdot N$	$\frac{1}{6}$	$\frac{L^2}{6} \cdot w_r \cdot N$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{L}{2} \cdot w_r \cdot N$
	 $Q = -\frac{N \cdot w_r}{L}$	$Q = -\frac{N \cdot w_r}{L}$	1	$-N \cdot w_r$	0	0

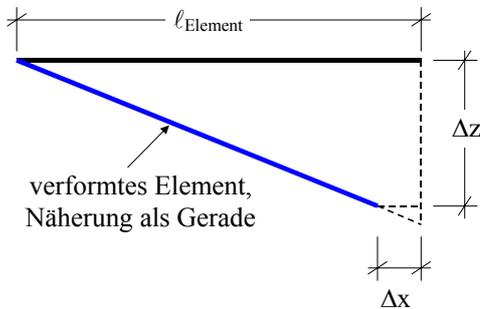
Tabelle A1.4 Auswertung der Arbeitsintegrale für Linienlast n + Gradient

		Virtuelle Kraft F = 1		Virt. Moment M = 1		
	Verläufe für Verformung, Moment und Querkraft	Verlauf von M und Q	Koppelwert	Arbeitsintegral	Koppelwert	Arbeitsintegral
Linienlast n						
	 Parabel	$M = -\frac{n \cdot L}{2} \cdot w_r$	$\frac{1}{12}$	$\frac{L^3}{24} \cdot w_r \cdot n$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{L^2}{6} \cdot w_r \cdot n$
		$Q = -n \cdot w_r$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{L}{2} \cdot w_r \cdot n$	0	0
Linienlastgradient nS						
	 kub. Parabel	$M = -\frac{nS \cdot L^2}{6} \cdot w_r$	$\frac{1}{20}$	$\frac{nS \cdot L^4}{120} \cdot w_r$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{nS \cdot L^3}{24} \cdot w_r$
		$Q = -\frac{nS \cdot L}{2} \cdot w_r$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{nS \cdot L^2}{6} \cdot w_r$	0	0

## Anhang A2

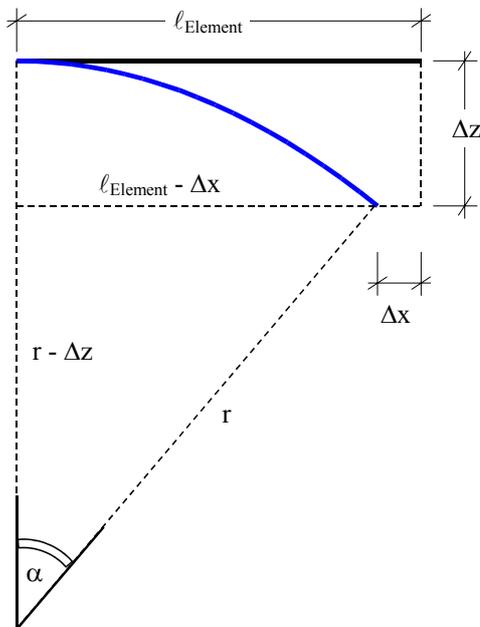
### Herleitung der Näherungsformeln zur Berücksichtigung von Th. 3. Ordnung

#### Näherung mit Gerade



$$\begin{aligned} \ell^2 &= (\ell - \Delta x)^2 + \Delta z^2 \\ \ell^2 &= \ell^2 - 2 \cdot \Delta x \cdot \ell + \Delta x^2 + \Delta z^2 \quad \Delta x^2 \approx 0 \\ 2 \cdot \Delta x \cdot \ell &= \Delta z^2 \\ \Delta x &= \frac{\Delta z^2}{2 \cdot \ell} \end{aligned}$$

#### Näherung mit Kreis



$$\sin \alpha = \frac{\ell - \Delta x}{r} \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6} \quad \text{Taylorreihe}$$

$$\cos \alpha = \frac{r - \Delta z}{r} \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \quad \text{Taylorreihe}$$

$$\alpha = \frac{\ell}{r} \quad \text{Bogenlänge Kreissegment}$$

$$\frac{\ell - \Delta x}{r} = \frac{\ell}{r} - \frac{\ell^3}{r^3 \cdot 6} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x = \frac{\ell^3}{r^2 \cdot 6}$$

$$\frac{r - \Delta z}{r} = 1 - \frac{\ell^2}{r^2 \cdot 2} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{\ell^2}{2 \cdot \Delta z}$$

$$\Delta x = \frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta z^2}{\ell}$$

## Anhang A3

### Eingabedaten für die in Kapitel 5 beschriebenen Versuchsnachrechnungen

Im folgenden sind die Eingabedaten für die Programme INCA2 und Stab2D-NL für die Versuchsnachrechnungen aus Kapitel 5 abgedruckt.

#### Aus Kapitel 5.1 Balken im 3- und 4-Punkt-Biegeversuch

##### Aus Kapitel 5.1.5 Nachrechnung Versuchsreihe 1, Balken 1 / 2

Eingabedatensatz Querschnitt für INCA2, Datei R20x20.inc

Polygon Nr. 1

```
-----
Material : PR - Messwerte (Beton), keine Vordehnung
Punkte (4 Stk.) - Koordinaten (Y / Z)
  1 ( 0)      0.1000 /   0.1000
  2 ( 1)     -0.1000 /   0.1000
  3 ( 2)     -0.1000 /  -0.1000
  4 ( 3)      0.1000 /  -0.1000
```

Bewehrungsgruppe Nr. 1

```
-----
Material: Bewehrung d = 10 mm (Stahl), keine Vordehnung
Punkte (4 Stk.) - Koordinaten (Y / Z) - Querschnittsfläche
  1 ( 4)      0.0750 /   0.0710  A = 0.79 cm²  D = 10 mm
  2 ( 5)     -0.0750 /   0.0710  A = 0.79 cm²  D = 10 mm
  3 ( 6)      0.0750 /  -0.0700  A = 0.79 cm²  D = 10 mm
  4 ( 7)     -0.0750 /  -0.0700  A = 0.79 cm²  D = 10 mm
```

Material Nr. 1 - PR - Messwerte

```
-----
Typ: Parabel-Rechteck
E-Modul = 30559.6078 N/mm²
Sigma.y.Druck = -52.3000 N/mm²      Sigma.y.Zug = 1.7433 N/mm²
Eps.y.Druck = -2.5500 mm/m          Eps.y.Zug = 0.0850 mm/m
Exponent.D = 1.4900                 Exponent.Z = 1.4900
Sigma2.D = -52.3000 N/mm²           Sigma.y.Zug = 1.7433 N/mm²
Eps2.Druck = -7.5500 mm/m           Eps2.Zug = 5.0850 mm/m
Versteifende Mitwirkung auf Zug
Eps.cr = 0.085 mm/m      Eps.y = 4.00 mm/m      n = 3.0
```

Material Nr. 2 - Bewehrung d = 10 mm

```
-----
Typ = Spline durch Punkte eines Polygonszugs
E-Modul = 197689.345 N/mm²
Wertepaare (Epsilon [mm/m] / Sigma [N/mm²])
( -5.9790/ -560.0000) ( -4.4000/ -544.4400) ( -3.6970/ -533.2730)
( -2.9470/ -513.5000) ( -2.6740/ -498.8700) ( -2.5140/ -483.7740)
( -2.3620/ -464.1000) ( -1.9030/ -378.7400) ( -0.7790/ -154.0000)
( 0.0000/ 0.0000) ( 0.7790/ 154.0000) ( 1.9030/ 378.7400)
( 2.3620/ 464.1000) ( 2.5140/ 483.7740) ( 2.6740/ 498.8700)
( 2.9470/ 513.5000) ( 3.6970/ 533.2730) ( 4.4000/ 544.4400)
( 5.9790/ 560.0000) ( 7.8440/ 569.2200) ( 10.8100/ 576.3300)
( 17.1870/ 585.7000) ( 25.4400/ 595.1220) ( 36.0700/ 602.5000)
( 43.7050/ 604.9300) ( 54.0000/ 605.0000)
```

## Eingabedatensatz Balkensystem für Stab2D-NL:

```

===== Knoten =====
Nr      x [m]      y [m]  X Y Phi
-----
  0      0,00000000  0,00000000  o
  1      1,50000000  0,00000000  o  o

===== Stäbe =====
Nr  Kn.A Kn.E      Länge [m] Querschnitt
-----
  0      0   1      1,50000000 Nachrechnung mit S + K + GA, t = 20 Tage

===== Querschnitte =====

  0 INCA2 : "Nachrechnung mit S + K + GA, t = 20 Tage"
    Datei : "R20x20.inc"
    Schwinden eps.s = -0.1176 mm/m      Kriechen phi = 0.1
    Schubsteifigkeit GA = 533333.333 kN mit Abminderung

  1 INCA2 : "Nachrechnung mit S + K + GA, t = 60 Tage"
    Datei : "R20x20.inc"
    Schwinden eps.s = -0.1934 mm/m      Kriechen phi = 0.1
    Schubsteifigkeit GA = 533333.333 kN mit Abminderung

===== Belastungen, nach Lastfällen geordnet =====

Lastfall 1
-----
Knotenlasten: 1
KnNr Typ      Wert
  0 Moment = -0.0106 kNm

Stablasten: 1
StNr Typ, Werte, Position
  0 Linien, global y
    f = 0.9424 kN/m  fS = 0 kN/m/m
    von x = 0 bis Stabende

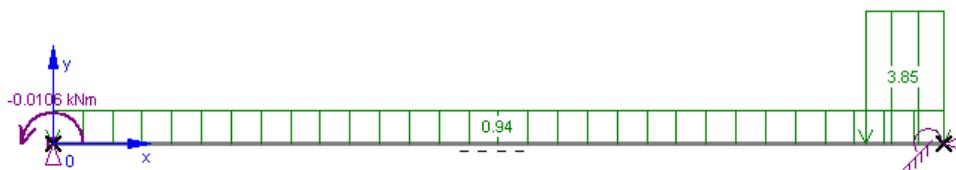
Lastfall 2
-----
Stablasten: 1
StNr Typ, Werte, Position
  0 Linien, global y,
    f = 3.8462 kN/m  fS = 0 kN/m/m
    von x = 1.37 bis Stabende

===== Lastfälle / Lastfallkombinationen =====

Lastfälle: 2
-----
  1 belegt Eigengewicht
  2 belegt Pressenlast

Lastfallkombinationen
-----
  LFK 5 : LF1 + 22*LF2

```



3-Punkt-Biegeversuch, Modellierung unter Nutzung der Symmetriebedingung

## Aus Kapitel 5.1.7 Last-Verformungsdiagramm für Versuchsreihe 2, Balken 3 / 4

Durch die versehentlich eingelegte Montagebewehrung wurden mehrere Querschnitte modelliert, wobei Knoten 9 (Punkt 6 der Bewehrungsgruppe 1) entsprechend verändert wurde.

Eingabedatensatz Querschnitt für INCA2, Datei R20x20-14.inc (Langzeitversuch):

Polygon Nr. 1

```
-----
Material : PR - Messwerte (Beton), keine Vordehnung
Punkte (4 Stk.) - Koordinaten (Y / Z)
  1 ( 0)      0.0990 /    0.1010
  2 ( 1)     -0.0990 /    0.1010
  3 ( 2)     -0.0990 /   -0.1010
  4 ( 3)      0.0990 /   -0.1010
```

Bewehrungsgruppe Nr. 1

```
-----
Material: Bewehrung d 10 mm (Stahl)
keine Vordehnung
Punkte (6 Stk.) - Koordinaten (Y / Z) - Querschnittsfläche
  1 ( 4)      0.0750 /    0.0730  A = 0.79 cm²   D = 10 mm
  2 ( 5)     -0.0750 /    0.0730  A = 0.79 cm²   D = 10 mm
  3 ( 6)      0.0750 /   -0.0670  A = 0.79 cm²   D = 10 mm
  4 ( 7)     -0.0750 /   -0.0670  A = 0.79 cm²   D = 10 mm
  5 ( 8)      0.0000 /    0.0730  A = 0.28 cm²   D = 6 mm
  6 ( 9)      0.0000 /    0.0400  A = 0.28 cm²   D = 6 mm unterschiedliche Lage!
```

Material Nr. 1 - PR - Messwerte

```
-----
Typ = Parabel-Rechteck
E-Modul = 30705.8824 N/mm²
Sigma.y.Druck = -54.0000 N/mm²      Sigma.y.Zug = 1.8000 N/mm²
Eps.y.Druck = -2.5500 mm/m          Eps.y.Zug = 0.0850 mm/m
Exponent.D = 1.4500                 Exponent.Z = 1.4500
Sigma2.D = -54.0000 N/mm²          Sigma.y.Zug = 1.8000 N/mm²
Eps2.Druck = -7.5500 mm/m          Eps2.Zug = 5.0850 mm/m
Versteifende Mitwirkung auf Zug
Eps.cr = 0.085 mm/m      Eps.y = 4.00 mm/m      n = 3.0
```

Material Nr. 2 - Bewehrung d 10 mm

```
-----
Typ = Spline durch Punkte eines Polygonszugs
E-Modul = 197689.345 N/mm²
Wertepaare (Epsilon [mm/m] / Sigma [N/mm²])
( -2.6740/ -498.8700) ( -2.5140/ -483.7700) ( -2.3620/ -464.1000)
( -1.9030/ -378.7400) ( -0.7790/ -154.0000) ( 0.0000/ 0.0000)
( 0.7790/ 154.0000) ( 1.9030/ 378.7400) ( 2.3620/ 464.1000)
( 2.5140/ 483.7700) ( 2.6740/ 498.8700) ( 2.9470/ 513.5000)
( 3.6970/ 533.2700) ( 4.4000/ 544.4400) ( 5.9790/ 560.0000)
( 7.8440/ 569.2200) ( 10.8100/ 576.3300) ( 17.1870/ 585.7000)
( 25.4400/ 595.1200) ( 36.0700/ 602.5000) ( 43.7050/ 604.9300)
( 54.0000/ 605.0000)
```

Eingabedatensatz Balkensystem für Stab2D-NL (Langzeitversuch):

```
===== Knoten =====
Nr      x [m]      y [m]  X Y Phi
-----
  0      0,00000000  0,00000000  o o
  1      3,00000000  0,00000000  o
  2      0,25000000 -0,00000000
  3      0,50000000  0,00000000
  4      0,75000000  0,00000000
  5      1,05000000  0,00000000
  6      1,25000000 -0,00000000
  7      1,50000000 -0,00000000
  8      1,85000000  0,00000000
```

```

===== Stäbe =====
Nr   Kn.A Kn.E   Länge [m] Querschnitt
-----
0    0    2    0,25000000 R 20x20 - 07,00
1    2    3    0,25000000 R 20x20 - 14,00
2    3    4    0,25000000 R 20x20 - 17,00
3    4    5    0,30000000 R 20x20 - 14,00
4    5    6    0,20000000 R 20x20 - 05,00
5    6    7    0,25000000 R 20x20 - 03,00
6    7    8    0,35000000 R 20x20 - 05,00
7    8    1    1,15000000 R 20x20 - 00,00

```

```

===== Querschnitte =====
0 INCA2 : "R 20x20 - 00,00"
  Datei : "R 20x20 - 0.inc"
  Schwinden eps.s = -0.3 mm/m   Kriechen phi = 0.7
  Schubsteifigkeit GA = 533333.333 kN mit Abminderung
1 INCA2 : "R 20x20 - 03,00"
  Datei : "R 20x20 - 3,00.inc"
  Schwinden eps.s = -0.3 mm/m   Kriechen phi = 0.7
  Schubsteifigkeit GA = 533333.333 kN mit Abminderung
2 INCA2 : "R 20x20 - 05,00"
  Datei : "R 20x20 - 5,00.inc"
  Schwinden eps.s = -0.3 mm/m   Kriechen phi = 0.7
  Schubsteifigkeit GA = 533333.333 kN mit Abminderung
3 INCA2 : "R 20x20 - 07,00"
  Datei : "R 20x20 - 7,00.inc"
  Schwinden eps.s = -0.3 mm/m   Kriechen phi = 0.7
  Schubsteifigkeit GA = 533333.333 kN mit Abminderung
4 INCA2 : "R 20x20 - 11,50"
  Datei : "R 20x20 - 11,50.inc"
  Schwinden eps.s = -0.3 mm/m   Kriechen phi = 0.7
  Schubsteifigkeit GA = 533333.333 kN mit Abminderung
5 INCA2 : "R 20x20 - 14,00"
  Datei : "R 20x20 - 14,00.inc"
  Schwinden eps.s = -0.3 mm/m   Kriechen phi = 0.7
  Schubsteifigkeit GA = 533333.333 kN mit Abminderung
6 INCA2 : "R 20x20 - 17,00"
  Datei : "R 20x20 - 17,00.inc"
  Schwinden eps.s = -0.3 mm/m   Kriechen phi = 0.7
  Schubsteifigkeit GA = 533333.333 kN mit Abminderung

```

```

===== Belastungen, nach Lastfällen geordnet =====

```

#### Lastfall 1

Knotenlasten: 2

KnNr	Typ	Wert
0	Moment	= -0.0108 kNm
1	Moment	= 0.0108 kNm

Stablasten: 8

StNr Typ, Werte, Position  
 0-7 Linien, global y, f = 0.9394 kN/m fS = 0 kN/m/m von x = 0 bis Stabende

#### Lastfall 2

Stablasten: 3

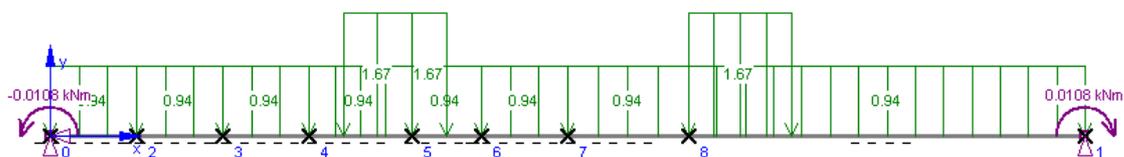
StNr Typ, Werte, Position  
 3 Linien, global y, f = 1.6667 kN/m fS = 0 kN/m/m von x = 0.1 bis Stabende  
 4 Linien, global y, f = 1.6667 kN/m fS = 0 kN/m/m von x = 0 bis 0.1  
 7 Linien, global y, f = 1.6667 kN/m fS = 0 kN/m/m von x = 0 bis 0.3

```

===== Lastfälle / Lastfallkombinationen =====

```

LFK 10 : LF1 + 32.5\*LF2



4-Punkt-Biegeversuch, im linken Balkenbereich liegen die Montageisen

## Aus Kapitel 5.1.8 Last-Verformungsdiagramme für Versuchsreihe 2, Balken 5 / 6

Eingabedatensatz Querschnitt für INCA2, Datei R20x20-Langzeit.inc (Langzeitversuch):

Polygon Nr. 1

```
-----
Material : PR - Messwerte (Beton), keine Vordehnung
Punkte (4 Stk.) - Koordinaten (Y / Z)
  1 ( 0)      0.0990 /   0.1000
  2 ( 1)     -0.0990 /   0.1000
  3 ( 2)     -0.0990 /  -0.1000
  4 ( 3)      0.0990 /  -0.1000
```

Bewehrungsgruppe Nr. 1

```
-----
Material: P 2 - Bewehrung d = 10 mm (Stahl), keine Vordehnung
Punkte (4 Stk.) - Koordinaten (Y / Z) - Querschnittsfläche
  1 ( 4)      0.0750 /   0.0720  A = 0.79 cm2  D = 10 mm
  2 ( 5)     -0.0750 /   0.0720  A = 0.79 cm2  D = 10 mm
  3 ( 6)      0.0750 /  -0.0700  A = 0.79 cm2  D = 10 mm
  4 ( 7)     -0.0750 /  -0.0700  A = 0.79 cm2  D = 10 mm
```

Material Nr. 1 - P 2 - Bewehrung d = 10 mm

```
-----
Typ = Spline durch Punkte eines Polygonszugs
E-Modul      = 197689.345 N/mm2
Wertepaare (Epsilon [mm/m] / Sigma [N/mm2])
( -25.4400/ -595.1220) ( -17.1870/ -585.7000) ( -10.8100/ -576.3300)
(  -7.8440/ -569.2200) (  -5.9790/ -560.0000) (  -4.4000/ -544.4400)
( -3.6970/ -533.2730) ( -2.9470/ -513.5000) ( -2.6740/ -498.8700)
( -2.5140/ -483.7740) ( -2.3620/ -464.1000) ( -1.9030/ -378.7400)
( -0.7790/ -154.0000) (  0.0000/   0.0000) (  0.7790/  154.0000)
(  1.9030/  378.7400) (  2.3620/  464.1000) (  2.5140/  483.7740)
(  2.6740/  498.8700) (  2.9470/  513.5000) (  3.6970/  533.2730)
(  4.4000/  544.4400) (  5.9790/  560.0000) (  7.8440/  569.2200)
( 10.8100/  576.3300) ( 17.1870/  585.7000) ( 25.4400/  595.1220)
( 36.0700/  602.5000) ( 43.7050/  604.9300) ( 54.0000/  605.0000)
```

Material Nr. 2 - PR - Messwerte

```
-----
Typ = Parabel-Rechteck
E-Modul      = 30122.3529 N/mm2
Sigma.y.Druck = -55.5000 N/mm2      Sigma.y.Zug = 1.8500 N/mm2
Eps.y.Druck  = -2.5500 mm/m          Eps.y.Zug  = 0.0850 mm/m
Exponent.D   = 1.3840                Exponent.Z = 1.3840
Sigma2.D     = -55.5000 N/mm2      Sigma.y.Zug = 1.8500 N/mm2
Eps2.Druck  = -7.5500 mm/m          Eps2.Zug  = 5.0850 mm/m
Versteifende Mitwirkung auf Zug
Eps.cr = 0.085 mm/m      Eps.y = 4.00 mm/m      n = 3.0
```

Eingabedatensatz Balkensystem für Stab2D-NL (Langzeitversuch):

```
===== Knoten =====
Nr      x [m]      y [m]  X Y Phi
-----
  0      1,50000000  0,00000000  o  o
  1      1,00000000  0,00000000
  2      0,00000000  0,00000000  o
  3     -0,15000000  0,00000000

===== Stäbe =====
Nr  Kn.A Kn.E      Länge [m] Querschnitt
-----
  0   1   0      0,50000000 R 20x20 Langzeit
  1   2   1      1,00000000 R 20x20 Langzeit
  2   3   2      0,15000000 Rechteck b / h = 0.200 /

===== Querschnitte =====
  0 Lin-Elast: "Rechteck b / h = 0.200 / 0.200 m"
    EI = 3866.667 kNm2  GA = 483333.333 kN  EA = 1160000 kN

  1 INCA2 : "R 20x20 Langzeit"
    Datei : "R 20x20 - Langzeit.inc"
    Schwinden eps.s = -0.3 mm/m      Kriechen phi = 0.7
    Schubsteifigkeit GA = 533333.333 kN mit Abminderung
```

```

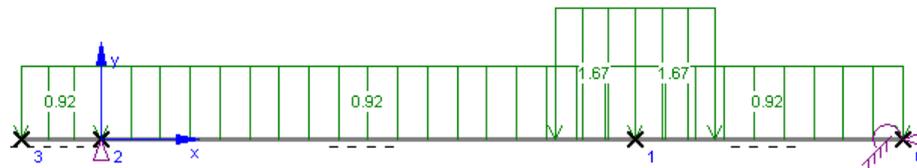
===== Belastungen, nach Lastfällen geordnet =====
Lastfall 1
-----
Stablasten: 3
StNr Typ, Werte, Position
0-2 Linien, global y
    f = 0.9212 kN/m    fS = 0 kN/m/m
    von x = 0 bis Stabende

Lastfall 2
-----
Stablasten: 2
StNr Typ, Werte, Position
0 Linien, global y
    f = 1.6667 kN/m    fS = 0 kN/m/m    von x = 0 bis 0.15
1 Linien, global y
    f = 1.6667 kN/m    fS = 0 kN/m/m    von x = 0.85 bis Stabende

===== Lastfälle / Lastfallkombinationen =====

LFK 9 : LF1 + 31.9*LF2

```



4-Punkt-Biegeversuch, Modellierung unter Nutzung der Symmetriebedingung

## Aus Kapitel 5.2 Versuche zur Ermittlung der Querkrafttragfähigkeit von Verbundplatten unter Längszug ohne Schubbewehrung

### Versuch A1

Eingabedatensatz Querschnitt für INCA2, Datei Balken A1.inc:

Polygon Nr. 1

```

-----
Material : Beton Experiment 1 (Beton), keine Vordehnung
Punkte (4 Stk.) - Koordinaten (Y / Z)
1 ( 0)      0.2015 /   -0.1505
2 ( 1)      0.2015 /    0.1505
3 ( 3)     -0.2015 /    0.1505
4 ( 2)     -0.2015 /   -0.1505

```

Bewehrungsgruppe Nr. 1

```

-----
Material: Betonstahl BST 500 Exp 1 (Stahl), keine Vordehnung
Punkte (10 Stk.) - Koordinaten (Y / Z) - Querschnittsfläche
1 ( 4)      0.1600 /   -0.1100  A = 3.14 cm²  D = 20 mm
2 ( 5)      0.0800 /   -0.1100  A = 3.14 cm²  D = 20 mm
3 ( 6)      0.0000 /   -0.1100  A = 3.14 cm²  D = 20 mm
4 ( 7)     -0.0800 /   -0.1100  A = 3.14 cm²  D = 20 mm
5 ( 8)     -0.1600 /   -0.1100  A = 3.14 cm²  D = 20 mm
6 ( 9)      0.1600 /    0.1100  A = 3.14 cm²  D = 20 mm
7 (10)      0.0800 /    0.1100  A = 3.14 cm²  D = 20 mm
8 (11)      0.0000 /    0.1100  A = 3.14 cm²  D = 20 mm
9 (12)     -0.0800 /    0.1100  A = 3.14 cm²  D = 20 mm
10 (13)    -0.1600 /    0.1100  A = 3.14 cm²  D = 20 mm

```

## Material Nr. 1 - Betonstahl BSt 500 Exp 1

```

-----
Typ = Parabel-Rechteck
E-Modul      = 193144.912 N/mm2
Sigma.y.Druck = -579.0000 N/mm2      Sigma.y.Zug = 579.0000 N/mm2
Eps.y.Druck  = -3.1978 mm/m          Eps.y.Zug  = 3.1978 mm/m
Exponent.D   = 1.0667                Exponent.Z = 1.0667
Sigma2.D     = -651.0000 N/mm2      Sigma.y.Zug = 651.0000 N/mm2
Eps2.Druck  = -82.0000 mm/m          Eps2.Zug  = 82.0000 mm/m

```

## Material Nr. 2 - Beton Experiment 1

```

-----
Typ = Parabel nach EC2 / DIN 1045-1 (neu) für Schnittgrößenermittlung
Druckseite      Zugseite
E-Modul         = 31680.0000 N/mm2      Sigma.y.Zug = 1.8600 N/mm2
Sigma.c (f.c)   = -46.5400 N/mm2      Eps.y.Zug  = 0.1000 mm/m
Eps.c1          = -2.4700 mm/m          Exponent.Z = 1.7500
Versteifende Mitwirkung auf Zug
Eps.cr = 0.100 mm/m      Eps.y = 3.198 mm/m      n = 1.8

```

## Eingabedatensatz Balkensystem für Stab2D-NL (Versuch A1):

```

===== Knoten =====
Nr      x [m]      y [m]  X Y Phi
-----
0      0,00000000  0,00000000
1      0,17500000  0,00000000  o
2      2,17500000  0,00000000  o
3      0,92500000  0,00000000  o
4      2,35000000  0,00000000

===== Stäbe =====
Nr  Kn.A Kn.E  Länge [m] Querschnitt
-----
0   0   1   0,17500000 Rechteck b / h = 0.40 / 0
1   1   3   0,75000000 Balken A1
2   3   2   1,25000000 Balken A1
3   2   4   0,17500000 Rechteck b / h = 0.40 / 0

===== Querschnitte =====
0 INCA2 : "Balken A1"
  Datei : "Balken A1.inc"
  Schwinden eps.s = -0.09 mm/m      Kriechen phi = 0.3
  Schubsteifigkeit GA = 1386666.667 kN mit Abminderung

1 Lin-Elast: "Rechteck b / h = 0.40 / 0.30 m"
  EI = 7260 kNm2  GA = 273450 kN  EA = 491015 kN

===== Belastungen, nach Lastfällen geordnet =====
Lastfall 1
-----
Stablasten: 4
StNr Typ, Werte, Position
0-3 Linien, global y
  f = 2.88 kN/m  fS = 0 kN/m/m  von x = 0 bis Stabende

Lastfall 2
-----
Stablasten: 2
StNr Typ, Werte, Position
0 Kraft, global x,  F = 100 kN  bei x = 0
3 Kraft, global x,  F = -100 kN  bei x = 0.175

Lastfall 3
-----
Stablasten: 2
StNr Typ, Werte, Position
1 Linien, global y
  f = -25 kN/m  fS = 0 kN/m/m  von x = 0.55 bis Stabende
2 Linien, global y
  f = -25 kN/m  fS = 0 kN/m/m  von x = 0 bis 0.2

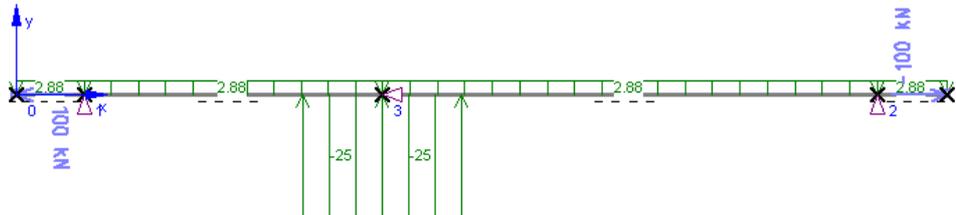
```

```

===== Lastfälle / Lastfallkombinationen =====
Lastfälle: 3
-----
1 belegt Eigengewicht g=24 knm2
2 belegt Zugnormalkraft
3 belegt Pressenlast

Lastfallkombinationen: 1
-----
LFK 1 : LF1 + 4.5*LF2 + 10*LF3

```



Modellierung Balken A1, Pressenlast (außermittig) wirkt nach oben

## Versuch A5

Eingabedatensatz Querschnitt für INCA2, Datei Balken A5.inc:

Polygon Nr. 1

```

-----
Material : Beton, Messwerte (Beton), keine Vordehnung
Punkte (4 Stk.) - Koordinaten (Y / Z)
1 ( 0) 0.2010 / -0.1500
2 ( 1) 0.2010 / 0.1500
3 ( 3) -0.2010 / 0.1500
4 ( 2) -0.2010 / -0.1500

```

Bewehrungsgruppe Nr. 1

```

-----
Material: Bewehrung, Messwerte (Stahl)
keine Vordehnung
Punkte (10 Stk.) - Koordinaten (Y / Z) - Querschnittsfläche
1 ( 4) 0.1600 / -0.1100 A = 2.01 cm² D = 16 mm
2 ( 5) 0.0800 / -0.1100 A = 2.01 cm² D = 16 mm
3 ( 6) 0.0000 / -0.1100 A = 2.01 cm² D = 16 mm
4 ( 7) -0.0800 / -0.1100 A = 2.01 cm² D = 16 mm
5 ( 8) -0.1600 / -0.1100 A = 2.01 cm² D = 16 mm
6 ( 9) 0.1600 / 0.1100 A = 2.01 cm² D = 16 mm
7 (10) 0.0800 / 0.1100 A = 2.01 cm² D = 16 mm
8 (11) 0.0000 / 0.1100 A = 2.01 cm² D = 16 mm
9 (12) -0.0800 / 0.1100 A = 2.01 cm² D = 16 mm
10 (13) -0.1600 / 0.1100 A = 2.01 cm² D = 16 mm

```

Material Nr. 1 - Beton, Messwerte

```

-----
Typ = Parabel-Rechteck
E-Modul = 32632.1139 N/mm²
Sigma.y.Druck = -49.3800 N/mm² Sigma.y.Zug = 2.0000 N/mm²
Eps.y.Druck = -2.5100 mm/m Eps.y.Zug = 0.1000 mm/m
Exponent.D = 1.6587 Exponent.Z = 1.6587
Sigma2.D = -49.3800 N/mm² Sigma.y.Zug = 2.0000 N/mm²
Eps2.Druck = -7.2000 mm/m Eps2.Zug = 5.1100 mm/m
Versteifende Mitwirkung auf Zug
Eps.cr = 0.100 mm/m Eps.y = 3.0467 mm/m n = 1.8

```

## Material Nr. 2 - Bewehrung, Messwerte

```

-----
Typ = Parabel-Rechteck
E-Modul      = 205499.803 N/mm2
Sigma.y.Druck = -585.0000 N/mm2
Eps.y.Druck  = -3.0467 mm/m
Exponent.D   = 1.0702
Sigma2.D     = -663.0000 N/mm2
Eps2.Druck  = -120.0000 mm/m

Sigma.y.Zug = 585.0000 N/mm2
Eps.y.Zug  = 3.0467 mm/m
Exponent.Z  = 1.0702
Sigma.y.Zug = 663.0000 N/mm2
Eps2.Zug   = 120.0000 mm/m

```

## Eingabedatensatz Balkensystem für Stab2D-NL (Versuch A5):

=> identisch mit dem Eingabedatensatz für Balken A1

## Aus Kapitel 5.3 Versuche an Glasfaserbewehrten Betonbalken

## Eingabedatensatz Querschnitt für INCA2, Datei Rechteck-Glasfaser.inc:

## Polygon Nr. 1

```

-----
Material : Beton fc = 34,5 N/mm2 (Beton)
keine Vordehnung
Punkte (4 Stk.) - Koordinaten (Y / Z)
  1 ( 0)    0.2000 /    0.3000
  2 ( 1)    0.0000 /    0.3000
  3 ( 2)    0.0000 /    0.0000
  4 ( 3)    0.2000 /    0.0000

```

## Bewehrungsgruppe Nr. 1

```

-----
Material: Polymer Fiber (Stahl), keine Vordehnung
Punkte (15 Stk.) - Koordinaten (Y / Z) - Querschnittsfläche
  1 ( 4)    0.1500 /    0.2750  A = 2.27 cm2  D = 16.99 mm
  2 ( 5)    0.0500 /    0.2750  A = 2.27 cm2  D = 16.99 mm
  3 ( 6)    0.1500 /    0.2250  A = 2.27 cm2  D = 16.99 mm
  4 ( 7)    0.0500 /    0.2250  A = 2.27 cm2  D = 16.99 mm
  5 ( 8)    0.0500 /    0.0500  A = 1.00 cm2  D = 11.28 mm
  6 ( 9)    0.1500 /    0.0500  A = 1.00 cm2  D = 11.28 mm
  7 (10)    0.1000 /    0.2300  A = 0.50 cm2  D = 8.01 mm
  8 (11)    0.1000 /    0.2350  A = 0.50 cm2  D = 8.01 mm
  9 (12)    0.1000 /    0.2400  A = 0.50 cm2  D = 8.01 mm
 10 (13)    0.1000 /    0.2450  A = 0.50 cm2  D = 8.01 mm
 11 (14)    0.1000 /    0.2500  A = 0.50 cm2  D = 8.01 mm
 12 (15)    0.1000 /    0.2550  A = 0.50 cm2  D = 8.01 mm
 13 (16)    0.1000 /    0.2600  A = 0.50 cm2  D = 8.01 mm
 14 (17)    0.1000 /    0.2650  A = 0.50 cm2  D = 8.01 mm
 15 (18)    0.1000 /    0.2700  A = 0.50 cm2  D = 8.01 mm

```

Material Nr. 1 - Beton fc = 34,5 N/mm<sup>2</sup>

```

-----
Typ = Parabel nach EC2 / DIN 1045-1 (neu) für Schnittgrößenermittlung
Druckseite                               Zugseite
E-Modul      = 30900.0000 N/mm2          Sigma.y.Zug = 1.1500 N/mm2
Sigma.c (f.c) = -34.5000 N/mm2          Eps.y.Zug  = 0.1000 mm/m
Eps.cl       = -2.2500 mm/m              Exponent.Z  = 2.0000
Versteifende Mitwirkung auf Zug
Eps.cr = 0.100 mm/m      Eps.y = 2.5 mm/m      n = 2.0

```

## Material Nr. 2 - Polymer Fiber

```

-----
Typ = Parabel-Rechteck
E-Modul      = 26679.6641 N/mm2
Sigma.y.Druck = -177.9000 N/mm2
Eps.y.Druck  = -6.6680 mm/m
Exponent.D   = 1.0000
Sigma2.D     = -177.9000 N/mm2
Eps2.Druck  = -20.0000 mm/m

Sigma.y.Zug = 266.8000 N/mm2
Eps.y.Zug  = 10.0000 mm/m
Exponent.Z  = 1.0000
Sigma.y.Zug = 266.8000 N/mm2
Eps2.Zug   = 20.0000 mm/m

```

Eingabedatensatz Balkensystem für Stab2D-NL (Versuch mit  $\ell = 2300$  mm):

=> bis auf die Länge identisch mit dem Eingabedatensatz für die anderen Balken

```

===== Knoten =====
Nr      x [m]      y [m]  X Y Phi
-----
  0      0,00000000  0,00000000  o
  1      1,15000000  0,00000000  o  o   je nach Balkenlänge unterschiedlich
  2     -0,15000000  0,00000000

===== Stäbe =====
Nr  Kn.A Kn.E      Länge [m] Querschnitt
-----
  0   0   1      1,15000000 Rechteck
  1   2   0      0,15000000 Rechteck b / h = 0.20 / 0

===== Querschnitte =====
  0 INCA2 : "Rechteck-Glasfaser"
    Datei : "Rechteck-Glasfaser.inc"
    Schwinden eps.s = -0.15 mm/m      Kriechen phi = 0.2
    Schubsteifigkeit GA = 765000 kN mit Abminderung

  1 Lin-Elast: "Rechteck b / h = 0.20 / 0.30 m"
    EI = 13770 kNm2  GA = 765000 kN  EA = 1836000 kN

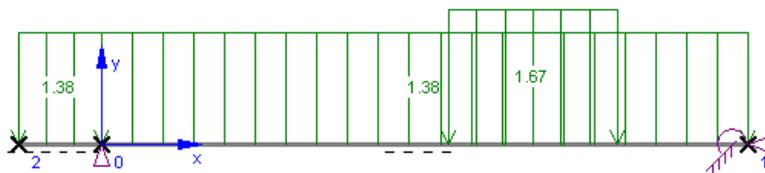
===== Belastungen, nach Lastfällen geordnet =====
Lastfall 1
-----
  Stablasten: 2
  StNr Typ, Werte, Position
  0-1 Linien, global y
    f = 1.38 kN/m  fS = 0 kN/m/m  von x = 0 bis Stabende

Lastfall 2
-----
  Stablasten: 1
  StNr Typ, Werte, Position
  0 Linien, global y
    f = 1.6667 kN/m  fS = 0 kN/m/m  von x = 0.6167 bis 0.9167

===== Lastfälle / Lastfallkombinationen =====
Lastfälle: 2
-----
  1 belegt Eigengewicht
  2 belegt Pressenlast

Lastfallkombinationen: 2
-----
  LFK 1 : LF1 + 204*LF2
  LFK 2 : LF1 + 183*LF2

```



4-Punkt-Biegeversuch, Modellierung unter Nutzung der Symmetriebedingung

## Aus Kapitel 5.4 Stützenversuche

## Eingabedatensatz Querschnitt für INCA2, Datei R CII 20x20 normal fest.inc

Polygon Nr. 1

```
-----
Material : Beton (Beton), keine Vordehnung
Punkte (4 Stk.) - Koordinaten (Y / Z)
  1 ( 0)      0.1000 /   0.1000
  2 ( 1)     -0.1000 /   0.1000
  3 ( 2)     -0.1000 /  -0.1000
  4 ( 3)      0.1000 /  -0.1000
```

Bewehrungsgruppe Nr. 1

```
-----
Material: Betonstahl Ks60, d = 16 mm (Stahl)
keine Vordehnung
Punkte (4 Stk.) - Koordinaten (Y / Z) - Querschnittsfläche
  1 ( 4)      0.0690 /   0.0690  A = 1.99 cm2  D = 15.92 mm
  2 ( 5)     -0.0690 /   0.0690  A = 1.99 cm2  D = 15.92 mm
  3 ( 6)      0.0690 /  -0.0690  A = 1.99 cm2  D = 15.92 mm
  4 ( 7)     -0.0690 /  -0.0690  A = 1.99 cm2  D = 15.92 mm
```

Material Nr. 1 - Betonstahl Ks60, d = 16 mm

```
-----
Typ = Parabel-Rechteck
E-Modul      = 207000.250 N/mm2
Sigma.y.Druck = -636.0000 N/mm2      Sigma.y.Zug = 636.0000 N/mm2
Eps.y.Druck  = -3.2725 mm/m           Eps.y.Zug  = 3.2725 mm/m
Exponent.D   = 1.0651                 Exponent.Z = 1.0651
Sigma2.D     = -721.0000 N/mm2      Sigma.y.Zug = 721.0000 N/mm2
Eps2.Druck  = -100.0000 mm/m          Eps2.Zug   = 100.0000 mm/m
```

Material Nr. 2 - Beton

```
-----
Typ = Parabel-Rechteck
E-Modul      = 30799.9261 N/mm2
Sigma.y.Druck = -37.0000 N/mm2      Sigma.y.Zug = 1.8500 N/mm2
Eps.y.Druck  = -2.3000 mm/m           Eps.y.Zug  = 0.1150 mm/m
Exponent.D   = 1.9146                 Exponent.Z = 1.9146
Sigma2.D     = -37.0000 N/mm2      Sigma.y.Zug = 1.8500 N/mm2
Eps2.Druck  = -7.3000 mm/m           Eps2.Zug   = 5.1150 mm/m
Versteifende Mitwirkung auf Zug
Eps.cr = 0.115 mm/m      Eps.y = 3.27 mm/m      n = 1.5
```

## Eingabedatensatz Balkensystem für Stab2D-NL (Stützenversuch C II, normal fester Beton):

```
===== Knoten =====
Nr      x [m]      y [m]  X Y Phi
-----
```

```
  0      0,00000000    0,00000000    o  o
  1      0,00000000    2,10000000
  2      0,02000000    1,95000000
  3      0,02000000    2,10000000    o
```

```
===== Stäbe =====
Nr  Kn.A Kn.E      Länge [m] Querschnitt
-----
```

```
  0      0      1      2,10000000 R C II 20x20 normal fest
  1      1      3      0,02000000 Rechteck b / h = 0.200 /
  2      3      2      0,15000000 Rechteck b / h = 0.200 /
```

```
===== Querschnitte =====
```

```
  0 INCA2 : "R C II 20x20 normal fest"
    Datei : "R C II 20x20 normal fest.inc"
    Schwinden eps.s = -0.157 mm/m      Kriechen phi = 0.3
    Schubsteifigkeit GA = oo (Vernachlässigung der Schubverformung)
```

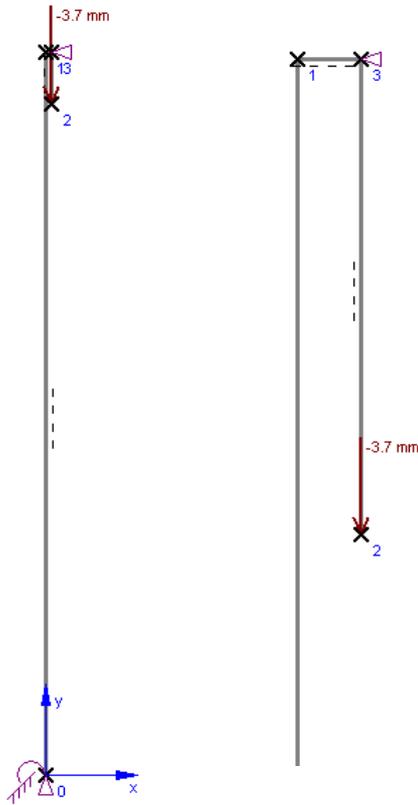
```
  1 Lin-Elast: "Rechteck b / h = 0.200 / 0.200 m"
    EI = 26666.667 kNm2  GA = 3333333.333 kN  EA = 8000000 kN
```

=====  
Belastungen, nach Lastfällen geordnet  
=====

Lastfall 1

Knotenlasten: 1

KnNr	Typ	Wert
2	Weg.y	= -3.7 mm



Modellierung der Stütze unter Nutzung der Symmetrie. Besondere Modellierung des Kräfteinleitungsereiches zur Berücksichtigung der Kinematik des vorhandenen Auflagers.

### Eingabedatensatz Querschnitt für INCA2, Datei R CII 20x20 hoch fest.inc

Polygon Nr. 1

Material : Beton hoch fest (Beton), keine Vordehnung  
Punkte (4 Stk.) - Koordinaten (Y / Z)

1	( 0)	0.1000 /	0.1000
2	( 1)	-0.1000 /	0.1000
3	( 2)	-0.1000 /	-0.1000
4	( 3)	0.1000 /	-0.1000

Bewehrungsgruppe Nr. 1

Material: Betonstahl Ks60, d = 16 mm (Stahl), keine Vordehnung  
Punkte (4 Stk.) - Koordinaten (Y / Z) - Querschnittsfläche

1	( 4)	0.0690 /	0.0690	A = 1.99 cm <sup>2</sup>	D = 15.92 mm
2	( 5)	-0.0690 /	0.0690	A = 1.99 cm <sup>2</sup>	D = 15.92 mm
3	( 6)	0.0690 /	-0.0690	A = 1.99 cm <sup>2</sup>	D = 15.92 mm
4	( 7)	-0.0690 /	-0.0690	A = 1.99 cm <sup>2</sup>	D = 15.92 mm

Material Nr. 1 - Betonstahl Ks60, d = 16 mm

Typ	=	Parabel-Rechteck		
E-Modul	=	207000.254 N/mm <sup>2</sup>		
Sigma.y.Druck	=	-636.0000 N/mm <sup>2</sup>	Sigma.y.Zug	= 636.0000 N/mm <sup>2</sup>
Eps.y.Druck	=	-3.2725 mm/m	Eps.y.Zug	= 3.2725 mm/m
Exponent.D	=	1.0651	Exponent.Z	= 1.0651
Sigma2.D	=	-721.0000 N/mm <sup>2</sup>	Sigma.y.Zug	= 721.0000 N/mm <sup>2</sup>
Eps2.Druck	=	-100.0000 mm/m	Eps2.Zug	= 100.0000 mm/m

## Material Nr. 2 - Beton hoch fest

```

-----
Typ = Parabel-Rechteck
E-Modul      = 45260.0000 N/mm2
Sigma.y.Druck = -93.0000 N/mm2      Sigma.y.Zug = 3.1000 N/mm2
Eps.y.Druck  = -3.0000 mm/m          Eps.y.Zug  = 0.1000 mm/m
Exponent.D   = 1.4600                Exponent.Z = 1.4600
Sigma2.D     = -93.0000 N/mm2      Sigma.y.Zug = 3.1000 N/mm2
Eps2.Druck  = -8.0000 mm/m          Eps2.Zug   = 5.1000 mm/m
Versteifende Mitwirkung auf Zug
Eps.cr = 0.100 mm/m      Eps.y = 3.27 mm/m      n = 1.7

```

Eingabedatensatz Balkensystem für Stab2D-NL (Stützenversuch C II, hochfester Beton):  
 => identisch mit dem Eingabedatensatz für die Stütze aus normalfestem Beton

## Aus Kapitel 5.5 Rahmenversuch

## Eingabedatensatz Querschnitt für INCA2, Datei Balken R 25 x 35.inc

## Polygon Nr. 1

```

-----
Material : Beton, fc = 29,0 N/mm2 (Beton), keine Vordehnung
Punkte (4 Stk.) - Koordinaten (Y / Z)
  1 ( 0)      0.1250 /   0.1750
  2 ( 1)     -0.1250 /   0.1750
  3 ( 2)     -0.1250 /  -0.1750
  4 ( 3)      0.1250 /  -0.1750

```

## Bewehrungsgruppe Nr. 1

```

-----
Material: Betonstahl BST 460 (Stahl), keine Vordehnung
Punkte (6 Stk.) - Koordinaten (Y / Z) - Querschnittsfläche
  1 ( 4)      0.0750 /   0.1250  A = 3.14 cm2  D = 20 mm
  2 ( 5)     -0.0750 /   0.1250  A = 3.14 cm2  D = 20 mm
  3 ( 6)      0.0750 /  -0.1250  A = 3.14 cm2  D = 20 mm
  4 ( 7)     -0.0750 /  -0.1250  A = 3.14 cm2  D = 20 mm
  5 ( 8)      0.0000 /   0.1250  A = 3.14 cm2  D = 20 mm
  6 ( 9)      0.0000 /  -0.1250  A = 3.14 cm2  D = 20 mm

```

## Material Nr. 1 - Betonstahl BST 460

```

-----
Typ = Parabel-Rechteck
E-Modul      = 199999.720 N/mm2
Sigma.y.Druck = -460.0000 N/mm2      Sigma.y.Zug = 460.0000 N/mm2
Eps.y.Druck  = -2.5000 mm/m          Eps.y.Zug  = 2.5000 mm/m
Exponent.D   = 1.0870                Exponent.Z = 1.0870
Sigma2.D     = -510.0000 N/mm2      Sigma.y.Zug = 510.0000 N/mm2
Eps2.Druck  = -50.0000 mm/m          Eps2.Zug   = 50.0000 mm/m

```

Material Nr. 2 - Beton, fc = 29,0 N/mm<sup>2</sup>

```

-----
Typ = Parabel-Rechteck
E-Modul      = 16502.3810 N/mm2
Sigma.y.Druck = -29.0000 N/mm2      Sigma.y.Zug = 1.4500 N/mm2
Eps.y.Druck  = -2.1000 mm/m          Eps.y.Zug  = 0.1050 mm/m
Exponent.D   = 1.1950                Exponent.Z = 1.1950
Sigma2.D     = -29.0000 N/mm2      Sigma.y.Zug = 1.4500 N/mm2
Eps2.Druck  = -7.1000 mm/m          Eps2.Zug   = 5.1050 mm/m
Versteifende Mitwirkung auf Zug
Eps.cr = 0.105 mm/m      Eps.y = 2.50 mm/m      n = 1.5

```

## Eingabedatensatz Querschnitt für INCA2, Datei Stütze R 25 x 37,5.inc

Polygon Nr. 1

```

-----
Material   : Beton, fc = 29,0 N/mm2 (Beton), keine Vordehnung
Punkte (4 Stk.) - Koordinaten (Y / Z)
  1 ( 0)      0.1250 /   0.1875
  2 ( 1)     -0.1250 /   0.1875
  3 ( 2)     -0.1250 /  -0.1875
  4 ( 3)      0.1250 /  -0.1875

```

Bewehrungsgruppe Nr. 1

```

-----
Material: Betonstahl BST 460 (Stahl), keine Vordehnung
Punkte (8 Stk.) - Koordinaten (Y / Z) - Querschnittsfläche
  1 ( 4)      0.0850 /  -0.1475  A = 3.14 cm2  D = 20 mm
  2 ( 5)     -0.0850 /  -0.1475  A = 3.14 cm2  D = 20 mm
  3 ( 6)      0.0850 /   0.1475  A = 3.14 cm2  D = 20 mm
  4 ( 7)     -0.0850 /   0.1475  A = 3.14 cm2  D = 20 mm
  5 ( 8)      0.0000 /  -0.1475  A = 3.14 cm2  D = 20 mm
  6 ( 9)      0.0000 /   0.1475  A = 3.14 cm2  D = 20 mm
  7 (10)      0.0850 /   0.0000  A = 3.14 cm2  D = 20 mm
  8 (11)     -0.0850 /   0.0000  A = 3.14 cm2  D = 20 mm

```

Material Nr. 1 - Betonstahl BST 460

```

-----
Typ = Parabel-Rechteck
E-Modul      = 199999.720 N/mm2
Sigma.y.Druck = -460.0000 N/mm2
Eps.y.Druck  = -2.5000 mm/m
Exponent.D   = 1.0870
Sigma2.D     = -510.0000 N/mm2
Eps2.Druck  = -50.0000 mm/m
Sigma.y.Zug  = 460.0000 N/mm2
Eps.y.Zug   = 2.5000 mm/m
Exponent.Z   = 1.0870
Sigma.y.Zug  = 510.0000 N/mm2
Eps2.Zug    = 50.0000 mm/m

```

Material Nr. 2 - Beton, fc = 29,0 N/mm<sup>2</sup>

```

-----
Typ = Parabel-Rechteck
E-Modul      = 16502.3810 N/mm2
Sigma.y.Druck = -29.0000 N/mm2
Eps.y.Druck  = -2.1000 mm/m
Exponent.D   = 1.1950
Sigma2.D     = -29.0000 N/mm2
Eps2.Druck  = -7.1000 mm/m
Sigma.y.Zug  = 1.4500 N/mm2
Eps.y.Zug   = 0.1050 mm/m
Exponent.Z   = 1.1950
Sigma.y.Zug  = 1.4500 N/mm2
Eps2.Zug    = 5.1050 mm/m
Versteifende Mitwirkung auf Zug
Eps.cr = 0.105 mm/m      Eps.y = 2.50 mm/m      n = 1.5

```

## Eingabedatensatz Balkensystem für Stab2D-NL:

```

===== Knoten =====
Nr      x [m]      y [m]  X Y Phi
-----
  0      0,00000000  0,00000000  o o
  1      0,00000000  0,17000000
  2      0,00000000  1,17000000
  3      0,00000000  3,17000000
  4      0,00000000  3,69500000
  5      3,00500000  0,00000000  o o
  6      3,00500000  0,17000000
  7      3,00500000  1,17000000
  8      3,00500000  3,17000000
  9      3,00500000  3,69500000
 10      0,18000000  1,17000000
 11      0,18000000  3,17000000
 12      2,82500000  1,17000000
 13      2,82500000  3,17000000

```

```

===== Stäbe =====
Nr      Kn.A Kn.E      Länge [m] Querschnitt
-----
 0      2    1      1,00000000 Stütze R 25 x 37,5
 1      3    2      2,00000000 Stütze R 25 x 37,5
 2      4    3      0,52500000 Stütze R 25 x 37,5
 3      8    9      0,52500000 Stütze R 25 x 37,5
 4      7    8      2,00000000 Stütze R 25 x 37,5
 5      6    7      1,00000000 Stütze R 25 x 37,5
 6      1    0      0,17000000 Rechteck b / h = 0.300 /
 7      5    6      0,17000000 Rechteck b / h = 0.300 /
 8      3   11      0,18000000 Balken R 25 x 35 - 2
 9      2   10      0,18000000 Balken R 25 x 35 - 2
10      8   13      0,18000000 Balken R 25 x 35 - 2
11      7   12      0,18000000 Balken R 25 x 35 - 2
12     11   13      2,64500000 Balken R 25 x 35
13     10   12      2,64500000 Balken R 25 x 35

===== Querschnitte =====
 0 INCA2 : "Balken R 25 x 35"
   Datei : "Balken R 25 x 35.inc"
   Schwinden eps.s = 0 mm/m      Kriechen phi = 0
   Schubsteifigkeit GA = oo (Vernachlässigung der Schubverformung)

 1 INCA2 : "Stütze R 25 x 37,5"
   Datei : "Stütze R 25 x 37,5.inc"
   Schwinden eps.s = 0 mm/m      Kriechen phi = 0
   Schubsteifigkeit GA = oo (Vernachlässigung der Schubverformung)

 2 Lin-Elast: "Rechteck b / h = 0.300 / 0.300 m"
   EI = 25000 kNm²  GA = 1388888.887 kN  EA = 3333333.33 kN

 3 Lin-Elast: "Rechteck b / h = 0.250 / 0.350 m"
   EI = 20825.638 kNm²  GA = 850026.042 kN  EA = 2040062.5 kN

 4 Lin-Elast: "Rechteck b / h = 0.250 / 0.375 m"
   EI = 25614.624 kNm²  GA = 910742.188 kN  EA = 2185781.25 kN

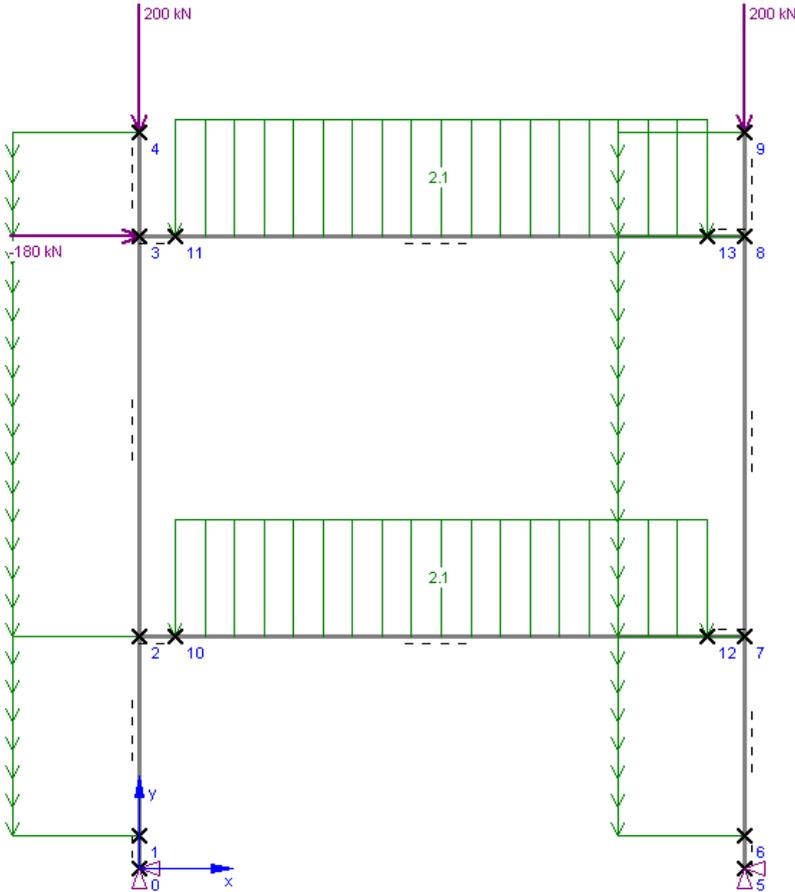
 5 INCA2 : "Balken R 25 x 35 - 2", zweiter Teil des gevouteten Querschnitts
   Datei : "Balken R 25 x 35 - 2.inc"
   Schwinden eps.s = 0 mm/m      Kriechen phi = 0
   Schubsteifigkeit GA = oo (Vernachlässigung der Schubverformung)

===== Belastungen, nach Lastfällen geordnet =====
Lastfall 1
-----
Stablasten: 8
StNr Typ, Werte, Position
 0 Linien, lokal x, f = -2.25 kN/m von x = 0 bis Stabende
 1 Linien, lokal x, f = -2.25 kN/m von x = 0 bis Stabende
 2 Linien, lokal x, f = -2.25 kN/m von x = 0 bis Stabende
 3 Linien, lokal x, f = 2.25 kN/m von x = 0 bis Stabende
 4 Linien, lokal x, f = 2.25 kN/m von x = 0 bis Stabende
 5 Linien, lokal x, f = 2.25 kN/m von x = 0 bis Stabende
12 Linien, global y, f = 2.1 kN/m von x = 0 bis Stabende
13 Linien, global y, f = 2.1 kN/m von x = 0 bis Stabende

Lastfall 2
-----
Knotenlasten: 2
KnNr Typ Wert
 4 Kraft.y = 200 kN
 9 Kraft.y = 200 kN

Lastfall 3
-----
Knotenlasten: 1
KnNr Typ Wert
 3 Kraft.x = -180 kN

```



Modellierung des Rahmens

## Anhang A4

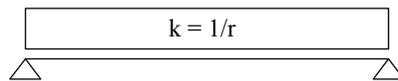
### Herleitung der Formel zur Bestimmung der Verlängerung des Balkens beim Ausführen einer Überhöhung

Berechnung einer konstanten Verkrümmung für eine gegebene Verformung in Feldmitte mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit

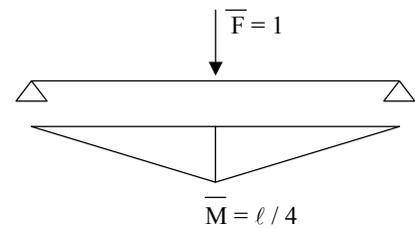
$$w = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{1}{4} \cdot \ell^2$$

$$k = \frac{w \cdot 8}{\ell^2}$$

0-System



1-System

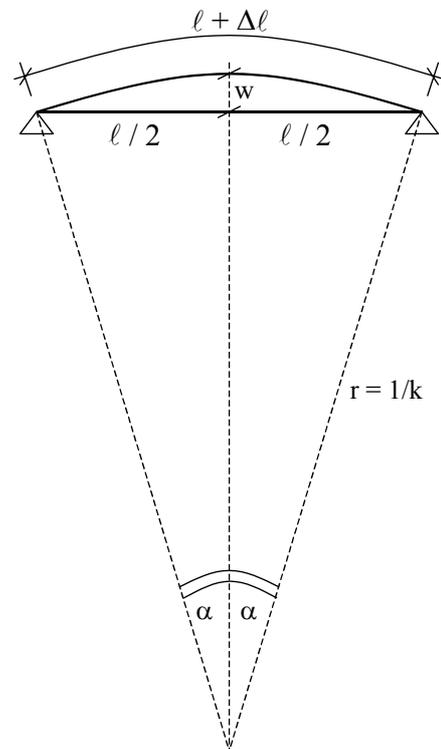


Berechnung der Längendifferenz

$$r = \frac{1}{k} = \frac{\ell^2}{8 \cdot w}$$

$$\tan \alpha = \frac{\ell/2}{r - w}$$

$$\ell + \Delta\ell = 2 \cdot \alpha \cdot r$$



Gleichungen umstellen und einsetzen liefert

$$\Delta\ell = 2 \cdot \alpha \cdot r - \ell$$

$$= 2 \cdot \arctan\left(\frac{\ell/2}{r - w}\right) \cdot \frac{\ell^2}{8 \cdot w} - \ell$$

$$= \arctan\left(\frac{\ell}{2 \cdot (\ell^2/(8 \cdot w) - w)}\right) \cdot \frac{\ell^2}{4 \cdot w} - \ell$$

